This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Mathematics
QA
385
.E57u

B 469048

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE IM SCHLUSSWORT DES LIE'SCHEN WERKES „GEOMETRIE DER BERÜHRUNGSTRANSFORMATIONEN" ANGEDEUTETEN PROBLEME

INAUGURAL-DISSERTATION

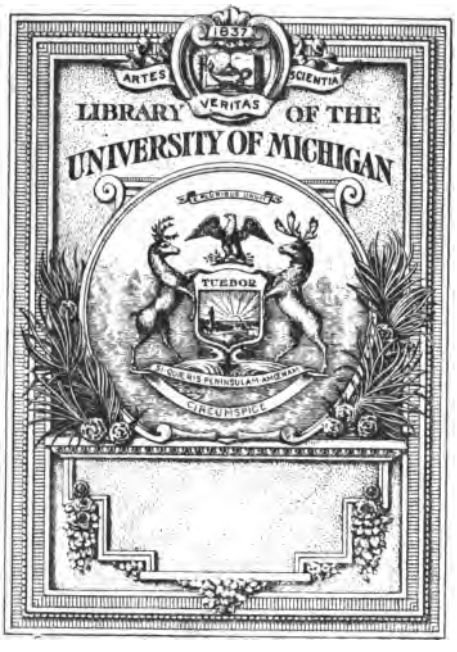
VERFASST UND DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER K. BAYER. JULIUS-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT WÜRZBURG
ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT AM 3. JANUAR 1910

VON

PHILIPP ENGELHARDT
AUS WÜRZBURG

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1910


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

MATHEMATICS
QA
385
.E57u

THEMA UND VORBEMERKUNGEN.

Im letzten Kapitel des Lie'schen Werkes „Geometrie der Berührungstransformationen", I. Band, sind sechs Probleme behandelt, die sich am Ende dieses Buches in bestimmter Anordnung zusammengestellt finden. Daselbst ist auch auf die interessanten Probleme hingewiesen, die sich durch Kombination je zweier dieser sechs Probleme ergeben. Die vorliegende Arbeit verfolgt die Absicht einen Beitrag zur Lösung dieser kombinierten Probleme zu liefern, deren Behandlung von Lie in dem nicht erschienenen II. Bande seiner „Geometrie der Berührungstransformationen" in Aussicht gestellt war.

Zwecks Ermöglichung einer kurzen Ausdrucksweise wollen wir vereinbaren, daß unter Problem (2,4) z. B. die durch Kombination des zweiten Problemes mit dem vierten Probleme hervorgehende Aufgabe verstanden werden soll, wobei die erwähnte Anordnung der sechs Probleme zugrunde liegen möge.

Das Problem (1,2) ist in Lies „Geometrie der Berührungstransformationen" vollständig gelöst; die Probleme (1,5) und (3,5) decken sich mit dem Probleme 5.

Literaturnachweise von der Form (cf. §.. des .. Kap., pag..) beziehen sich auf Lies „Geometrie der Berührungstransformationen".

237123

INHALTSÜBERSICHT.

Seite

§ 1. Lösung des Problemes (1, 3) 1
§ 2. Lösung des Problemes (1, 4) 2
§ 3. Beitrag zur Lösung des Problemes (1, 6) 11
§ 4. Lösung des Problemes (2, 3) 25
§ 5. Lösung des Problemes (2, 4) 39
Lösung des Problemes (2, 5) 26
§ 6. Beitrag zur Lösung des Problemes (2, 6) 51
§ 7. Beitrag zur Lösung des Problemes (3, 4) 54
§ 8. Beitrag zur Lösung des Problemes (3, 6) 57
Lösung des Problemes (4, 5) 6
§ 9. Beitrag zur Lösung des Problemes (4, 6) 58
Beitrag zur Lösung des Problemes (5, 6) 11

§ 1. Lösung des Problemes (1, 3).

„Gesucht sind alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung $F(x, y, z, p, q) = 0$, deren Charakteristiken auf allen Integralflächen zugleich Haupttangentenkurven und geodätische Linien sind."

Da einerseits jede geodätische Haupttangentenkurve einer Fläche eine gerade Linie darstellt (cf. Bianchi, „Vorles. üb. Diff. geom." § 112, pag. 214), und andererseits jede gerade Linie gleichzeitig Haupttangentenkurve und geodätische Linie auf allen sie enthaltenden Flächen ist, so erweist sich die vorliegende Aufgabe als vollkommen äquivalent mit dem Probleme 5 alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu bestimmen, deren Charakteristiken gerade Linien sind.

Die bei Goursat („Partielle Differentialgleichungen" § 20 des 2. Kap., pag. 41) und Lie („Geom. d. Berührungstransformationen" § 1 des 7. Kap., pag. 266, bzw. § 1 des 14. Kap., pag. 641) über das Problem 5 angestellten Untersuchungen benutzend, können wir daher unmittelbar das folgende Resultat aussprechen:

Satz 1: *„Die einzigen linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*

$$Pp + Qq = R, \tag{1}$$

deren Charakteristiken zugleich Haupttangentenkurven und geodätische Linien auf allen nicht-singulären Integralflächen bilden, sind erstens diejenigen, bei welchen die Relationen

$$\frac{\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}}{u} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}}{v} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}}{w} \tag{2}$$

identisch erfüllt sind, in denen zur Abkürzung

$$u = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \quad v = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \quad w = \frac{R}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}} \tag{3}$$

gesetzt ist, und zweitens diejenigen, deren Charakteristiken ∞^2 Minimalgeraden sind; bei letzteren ist

$$P^2 + Q^2 + R^2 \equiv 0. \tag{4}$$

Unter den nicht-linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung haben die vom Typus

$$F(p, q, z - px - qy) = 0 \tag{5}$$

und nur diese die verlangten Eigenschaften."

§ 2. Lösung des Problemes (1, 4).

„Es sind alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung $F(x, y, z, p, q) = 0$ zu ermitteln, deren Charakteristiken auf allen Integralflächen Haupttangentenkurven sind und deren Integralflächen lauter Geraden eines Linienkomplexes zu Normalen haben."

Bevor wir uns der eigentlichen Lösung unseres Problemes zuwenden, wollen wir einige vorbereitende Betrachtungen anstellen.

Zueinander supplementäre Elementarkegel.

Es sei ein beliebiger Elementarkegel K_1 gegeben; seine Spitze sei der Punkt P. Konstruieren wir das Umhüllungsgebilde aller Flächenelemente, die in P auf den Mantellinien von K_1 senkrecht stehen, so erhalten wir einen Elementarkegel K_2 mit derselben Spitze P. Der Kegel K_1 kann offenbar seinerseits als Enveloppe der in P auf den Mantellinien von K_2 senkrecht stehenden Flächenelemente aufgefaßt werden. Zwei in der angedeuteten Beziehung zueinander stehende Elementarkegel K_1, K_2 wollen wir in der Folge als zwei zueinander *supplementäre* bezeichnen. (K_1 und K_2 sind polarreziprok in bezug auf den absoluten Kegel mit der Spitze P).

Lineare u. nicht-lineare Diffgln d. gesuchten Art.

Es liege nunmehr ein beliebiger Linienkomplex Φ vor. Dieser ordnet jedem Raumpunkte P einen Komplexkegel K_1 zu, der dann und nur dann in ein ebenes Strahlenbüschel ausartet, wenn der vorliegende Komplex ein linearer (ein Nullsystem) ist*). Die zu den Komplexkegeln K_1 supplementären Elementarkegel K_2 sind, wie unmittelbar klar, die Elementarkegel der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, deren Integralflächen lauter Geraden des Komplexes Φ zu Normalen haben (cf. § 4 des 14. Kap., pag. 676). Sie degenerieren dann und nur dann in Ebenenbüschel, wenn der Komplex Φ linear ist. Daraus schließen wir, daß eine partielle Differentialgleichung, die zur gesuchten Kategorie zählt, dann und nur dann linear ist, wenn die Normalen ihrer Integralflächen einem linearen Komplexe angehören, also dann und nur dann nicht-linear ist, wenn ihre Integralflächen lauter Geraden eines nicht-linearen Komplexes zu Normalen haben.

*) Von der besonderen Erwähnung des leicht zu überblickenden Falles reduzibeler Komplexkegel K_1 glauben wir hier und im folgenden absehen zu sollen.

Ermittelung d. linearen Diffgln d. gesuchten Art.

Wir gehen nunmehr zur eigentlichen Lösung unseres Problemes über. Aus später ersichtlichen Gründen erscheint es dabei geboten, vor Behandlung des allgemeinen Falles die Frage nach den *linearen* Differentialgleichungen der verlangten Art zu erörtern. In die Untersuchung dieser Frage eintretend erinnern wir uns zunächst der Tatsache, daß die Charakteristiken einer linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (nach Theor. 25 in § 1 des 14. Kap., pag. 639) nur dann Haupttangentenkurven auf allen sie enthaltenden Integralflächen bilden, wenn sie gerade Linien sind. Bedenken wir ferner, daß jede der ∞^2 Charakteristiken einer linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung Trägerkurve von ∞^1 charakteristischen Streifen ist, und daß es (nach § 4 des 14. Kap., pag. 681) zu jedem charakteristischen Streifen einer partiellen Differentialgleichung, deren Integralflächen lauter Geraden eines Linienkomplexes zu Normalen haben, ∞^1 parallele charakteristische Streifen derselben Differentialgleichung gibt, so folgern wir leicht, daß das System der Charakteristiken jeder linearen partiellen Differentialgleichung der gesuchten Kategorie aus ∞^2 parallelen Geraden besteht. Daß umgekehrt jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung, deren Charakteristiken einen Parallelstrahlenbündel bilden, die beiden verlangten Eigenschaften besitzt, ist klar. Erstens sind die Charakteristiken als gerade Linien stets Haupttangentenkurven auf den Integralflächen. Zweitens gehören die Normalen der Integralflächen offenbar einem Linienkomplexe an, nämlich dem speziellen Nullsysteme, das aus den ∞^3 zu den Charakteristiken senkrecht verlaufenden Geraden besteht. Bezeichnen a, b, c drei beliebige Konstanten, so gibt es ∞^2 gerade Linien, deren Richtungscosinus mit a, b, c proportional sind. Der Komplex aller auf diesen senkrecht stehenden Geraden wird durch die Pfaff'sche Gleichung

$$(1) \qquad a dx + b dy + c dz = 0$$

definiert. Die lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$(2) \qquad ap + bq - c = 0$$

hat die genannten ∞^2 Geraden zu Charakteristiken, die Normalen ihrer Integralflächen gehören dem Komplexe (1) an. Bei willkürlicher Verfügung über die Verhältnisse $a:b:c$ stellt die Differentialgleichung (2) alle linearen partiellen Differentialgleichungen der verlangten Art dar.

Ermittelung d. nicht-linearen Diffgln d. gesuchten Art.

Fragen wir uns jetzt nach den *nicht-linearen* partiellen Differentialgleichungen der gesuchten Kategorie! Die Charakteristiken einer nicht-linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung bilden dann und nur dann Haupttangentenkurven auf den Integralflächen, wenn sie entweder geradlinig sind, oder wenn längs jeder Charakteristik die Normalen

der Flächenelemente des zugehörigen charakteristischen Streifens mit den Binormalen identisch sind. Da die erste Möglichkeit durch die zweite subsumiert wird, brauchen wir im folgenden nur die letztere in Betracht zu ziehen. Unterwerfen wir einen beliebigen charakteristischen Streifen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, deren Integralflächen lauter Geraden eines Linienkomplexes zu Normalen haben, allen ∞^1 Dilatationen, so geht er in ∞^1 charakteristische Streifen derselben Differentialgleichung über, von denen jeder die nämlichen ∞^1 Normalen besitzt wie der Ausgangsstreifen (cf. § 4 des 14. Kap., pag. 681 u. 682). Wir erkennen daher, daß sich zu jeder Charakteristik einer partiellen Differentialgleichung der gesuchten Art ∞^1 weitere Charakteristiken bestimmen lassen, die alle dieselben Binormalen haben. Hieraus folgt sofort, daß die Charakteristiken der gesuchten partiellen Differentialgleichungen ebene Kurven sind (cf. Scheffers, „Anwend. d. Diff.- u. Int.-R. auf Geom.", Bd. I, pag. 322). Da sie aber auch Haupttangentenkurven auf den Integralflächen bilden sollen und jede ebene Haupttangentenkurve einer Fläche eine gerade Linie ist (cf. Enneper, Gött. Nachr. 1870, pag. 499), so gehören die Differentialgleichungen der im vorliegenden Falle verlangten Art zur Kategorie der partiellen Differentialgleichungen mit geradlinigen Charakteristiken. Daher gelten, wenn

$$\mathfrak{F}(x, y, z, p, q) = 0 \tag{3}$$

die allgemeinste nicht-lineare Differentialgleichung der gesuchten Klasse bezeichnet, die beiden Gleichungen

$$\mathfrak{F}_x + \mathfrak{F}_z p = 0 \tag{4a}$$

und

$$\mathfrak{F}_y + \mathfrak{F}_z q = 0 \tag{4b}$$

(cf. § 1 des 14. Kap., pag. 641). Da die Normalen der Integralflächen der Differentialgleichung (3) einem Linienkomplexe angehören, besteht weiterhin die Relation

$$\mathfrak{F}_x p + \mathfrak{F}_y q - \mathfrak{F}_z = 0 \tag{4c}$$

(cf. § 4 des 14. Kap., pag. 681). Aus den drei Gleichungen (4a), (4b), (4c) folgt*):

$$\mathfrak{F}_x = 0, \quad \mathfrak{F}_y = 0, \quad \mathfrak{F}_z = 0. \tag{5}$$

*) Die simultanen Gleichungen (4a), (4b), (4c) sind homogen und linear in bezug auf die drei Größen $\mathfrak{F}_x$, $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$. Die Determinante dieses Systems von Gleichungen hat den Wert

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ p & q & -1 \end{vmatrix} = -(p^2 + q^2 + 1).$$

Auf den besonderen Fall, in dem $\Delta = 0$ ist, werden wir noch zu sprechen kommen.

Wir erkennen somit, daß die gesuchten nicht-linearen Differentialgleichungen von der Form

$$F(p, q) = 0 \tag{6}$$

sind, wenn F eine nicht-lineare Funktion ihrer Argumente bedeutet. Es ist leicht einzusehen, daß jede in der Form (6) enthaltene Differentialgleichung die beiden verlangten Eigenschaften besitzt*). Zunächst sind die Charakteristiken jeder derartigen Differentialgleichung gerade Linien und als solche Haupttangentenkurven auf den Integralflächen. Da ferner die Elementarkegel K_2 einer Differentialgleichung vom Typus (6) untereinander kongruent und gleich gestellt sind (cf. § 1 des 7. Kap., pag. 265) und die zu ihnen supplementären Elementarkegel K_1 daher dieselben Eigenschaften besitzen, so sind die Mantellinien der Kegel K_1 die Treffgeraden einer in der unendlich fernen Ebene gelegenen Kurve und bilden somit einen Linienkomplex. Also hat jede Differentialgleichung von der Form (6) auch die Eigenschaft, daß die Normalen ihrer Integralflächen einem Linienkomplexe angehören.

Die Monge'sche Gleichung der zu den Elementarkegeln K_2 der Differentialgleichung (6) supplementären Elementarkegel K_1 kann offenbar vermöge der Beziehung

$$p : q : -1 = dx : dy : dz \tag{7}$$

in der Gestalt

$$F\left(-\frac{dx}{dz}, -\frac{dy}{dz}\right) = 0^{**}) \tag{8}$$

geschrieben werden. (Dabei zeigt sich, daß bei einer Differentialgleichung der verlangten Art der Komplex der Normalen der Integralflächen nicht-linear ist, wenn die Differentialgleichung nicht-linear ist [cf. Seite 2 d. vorlieg. Arbeit]).

Wir haben jetzt erkannt, daß unter den nicht-linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung alle von x, y, z freien Differentialgleichungen und nur diese die beiden verlangten Eigenschaften besitzen, ein Resultat, welches an das im Falle der linearen Differentialgleichungen ermittelte Ergebnis anklingt. Fassen wir nunmehr auch diesen Fall wieder ins Auge, so können wir den folgenden Satz aussprechen:

Satz 2: *„Eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung besitzt dann und nur dann die Eigenschaft, daß ihre Charakteristiken Haupt-* Ergebnis.

*) Diese Überlegungen stellen wir mit Rücksicht auf spätere Betrachtungen an.

**) Wir bringen die Gleich. (8) nur deshalb nicht auf die Form $\Omega(dx, dy, dz) = 0$, weil die Konservierusg des Funktionszeichens F zweckmäßig erscheint (s. Gl. (11))

tangentenkurven auf den Integralflächen bilden und diese zu Normalen lauter Geraden eines Linienkomplexes haben, wenn sie von der Form

$$\mathfrak{F}(p, q) = 0 \tag{9}$$

ist; dabei bezeichnet $\mathfrak{F}$ eine beliebige Funktion ihrer Argumente. Die Charakteristiken jeder derartigen Differentialgleichung sind gerade Linien. Die Gleichung des Linienkomplexes, dem die Normalen der Integralflächen einer solchen Differentialgleichung angehören, geht aus dieser durch die Substitution

$$p = -\frac{dx}{dz},\ q = -\frac{dy}{dz} \tag{10}$$

hervor.“

Erledigung des Problemes (5, 4).

Die vorstehenden Untersuchungen lehren, daß das behandelte Problem (1, 4) mit der Aufgabe (5, 4) vollkommen äquivalent ist, alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu bestimmen, deren Charakteristiken gerade Linien sind und deren Integralflächen lauter Geraden eines Linienkomplexes zu Normalen haben, sodaß auch diese Aufgabe erledigt ist.

Ermittelung des allgemeinsten nicht-linearen Linienkompl., bei dem die zu den Kompl.-kegeln supplementären Elementarkegel ebenfalls einem Linienkompl. angehören.

Wie aus unseren Ausführungen hervorgeht, besitzen alle Linienkomplexe, deren Monge'sche Gleichung von x, y, z frei ist, und nur diese die Eigenschaft, daß die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, deren Integralflächen lauter Geraden des Komplexes zu Normalen haben, auf den Integralflächen Haupttangentenkurven bilden. Diese und nur diese Komplexe werden durch die Gleichung

$$\Omega(dx, dy, dz) = 0 \tag{11}$$

definiert, wenn Ω das Symbol für eine homogene, im übrigen jedoch beliebige Funktion ihrer Argumente ist. Nach dieser Vorbemerkung wollen wir jetzt dazu übergehen ein *Korollarium des Satzes* 2 abzuleiten:

Ist ein beliebiger aber nicht-linearer Linienkomplex vorgegeben und konstruieren wir die zu seinen Komplexkegeln supplementären Elementarkegel, so sind diese im allgemeinen natürlich nicht ebenfalls Komplexkegel eines Linienkomplexes. Wir stellen uns nun die Aufgabe *alle nicht-linearen Linienkomplexe zu ermitteln, die so beschaffen sind, daß die zu ihren Komplexkegeln supplementären Elementarkegel gleichfalls einem Linienkomplexe angehören.* Φ_1 sei der allgemeinste derartige Komplex. Seine Komplexkegel seien wieder mit K_1, die zu ihnen supplementären mit K_2 bezeichnet. Die Kegel K_2 sind die Elementarkegel der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, deren Inte-

gralflächen lauter Geraden des Komplexes Φ_1 zu Normalen haben. Da die Kegel K_2 hier einem Linienkomplexe Φ_2 angehören, so bilden die Charakteristiken dieser Differentialgleichung Haupttangentenkurven auf den Integralflächen (nach Theor. 25 in § 1 des 14. Kap., pag. 639). Diese Differentialgleichung gehört also zu der in Satz 2 besprochenen Klasse; die Monge'sche Gleichung des allgemeinsten Komplexes der gesuchten Art ist mithin in der Form (11) enthalten. Umgekehrt besitzt jeder in dieser Form enthaltene nicht-lineare Komplex die Eigenschaft, daß die zu seinen Komplexkegeln K_1 supplementären Elementarkegel K_2 einer nicht-linearen partiellen Differentialgleichung angehören, deren Charakteristiken ∞^3 gerade Linien sind. Da sich hieraus sofort ergibt, daß die zu den Komplexkegeln K_1 jedes durch die Gleichung (11) definierten nicht-linearen Linienkomplexes supplementären Elementarkegel K_2 Komplexkegel eines nicht-linearen Komplexes Φ_2 sind, so gilt der

Ergebnis (Korollarium des Satzes 2).

Satz 3: *„Die zu den Komplexkegeln eines nicht-linearen Linienkomplexes Φ_1 supplementären Elementarkegel gehören dann und nur dann einem Linienkomplexe Φ_2 an, wenn die Monge'sche Gleichung des Komplexes Φ_1 frei von x, y, z ist. Der Komplex Φ_2 ist alsdann gleichfalls nicht-linear; seine Monge'sche Gleichung enthält x, y, z ebenfalls nicht.“*

Die letzte Behauptung ist an sich klar, folgt aber auch aus dem ersten Teil des Satzes bei dessen Anwendung auf den Komplex Φ_2.

Eigenschaften der ermittelten Linienkompl. u. Diffgln. Vorbereitungen für die Lösung weiterer Probleme.

Den nicht-linearen Linienkomplexen von der Form (11) und den zugehörigen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung werden wir in anderem Zusammenhange noch wiederholt begegnen, sodaß wir uns veranlaßt sehen im folgenden noch etwas näher auf sie einzugehen. Es sei ein nicht-linearer Linienkomplex Φ_1 durch seine Monge'sche Gleichung

$$\Phi_1(dx,\ dy,\ dz) = 0 \tag{12}$$

gegeben, die wir auch in der Form

$$\Phi_1(x',\ y',\ z') = 0 \qquad [\text{abgekürzt } \Phi_{1'} = 0] \tag{12'}$$

schreiben wollen (Bezgl. dieser Schreibweise cf. § 1 des 7. Kap., pag. 251). Die Komplexkegel K_1 dieses Komplexes sind kongruent und gleich gestellt und schneiden daher alle eine und dieselbe Kurve $\varphi_{1\infty}$ aus der unendlich fernen Ebene aus. Die Gleichung $\Phi_{1'} = 0$ kann als Gleichung dieser Kurve in homogenen Punktkoordinaten $(x' : y' : z')$ aufgefaßt werden (cf. § 1 des 7. Kap., pag. 262). Die zu den Komplexkegeln K_1 supplementären Kegel K_2 mögen dem nicht-linearen Komplexe

(13) $$\Phi_2(dx, dy, dz) = 0$$

(13′) $$\Phi_2(x', y', z') = 0 \qquad [\text{abgekürzt } \Phi_{2'} = 0]$$

angehören. Auch sie enthalten alle eine bestimmte Kurve $\varphi_{2\infty}$ der unendlich fernen Ebene, nämlich die durch die Gleichung $\Phi_{2'} = 0$ definnierte. Bedenken wir die Entstehung der Kegel K_2 aus den Kegeln K_1, so erkennen wir ohne weiteres, daß die Kurve $\varphi_{2\infty}$ die zur Kurve $\varphi_{1\infty}$ in bezug auf den unendlich fernen imaginären Kugelkreis polarreziproke Kurve ist. Die partielle Differentialgleichung erster Ordnung, deren Elementarkegel die Kegel K_2 sind, laute

(14) $$F_2(p, q) = 0;$$

diejenige, welche die Kegel K_1 zu Elementarkegeln hat,

(15) $$F_1(p, q) = 0.$$

Wir erhalten diese Differentialgleichungen offenbar aus den Gleichungen $\Phi_{1'} = 0$, $\Phi_{2'} = 0$ bzw., indem wir auf diese die Substitution

(16) $$x' : y' : z' = p : q : -1$$

ausüben. Von der Gleichung $F_2 = 0$ gelangen wir zur Gleichung $\Phi_{2'} = 0$, indem wir p und q aus dem Systeme

(17) $$\left\{ \begin{array}{c} F_2(p, q) = 0 \\ \dfrac{x'}{F_{2p}} = \dfrac{y'}{F_{2q}} = \dfrac{z'}{pF_{2p} + qF_{2q}} \end{array} \right\} \downarrow \text{*)}$$

eliminieren (cf. § 4 des 11. Kap., pag. 511). Umgekehrt gelangen wir von der Gleichung $\Phi_{2'} = 0$ zur Gleichung $F_2 = 0$ durch Elimination der homogen auftretenden Größen x', y', z' aus dem Systeme

(18) $$\left\{ \begin{array}{c} \Phi_2(x', y', z') = 0 \\ \dfrac{\Phi_{2x'}}{p} = \dfrac{\Phi_{2y'}}{q} = \dfrac{\Phi_{2z'}}{-1} \end{array} \right\} \uparrow \text{**)}$$

(cf. § 2 des 7. Kap., pag. 259).

Die Gleichungen $\Phi_{1'} = 0$ und $F_1 = 0$ können natürlich durch analoge Prozesse auseinander abgeleitet werden. Aus der Gleichung $\Phi_{1'} = 0$ erhalten wir die Gleichung $F_1 = 0$ aber auch dadurch, daß wir zunächst mittels der Substitution (16) zur Gleichung $F_2 = 0$ übergehen, alsdann aus dieser durch den Prozeß (17)↓ die Gleichung $\Phi_{2'} = 0$ herleiten und schließlich auf letztere die Substitution (16) anwenden. Wir bemerken, daß wir überhaupt von jeder der vier Gleichungen $\Phi_{1'} = 0$, $F_1 = 0$; $\Phi_{2'} = 0$, $F_2 = 0$ zu jeder anderen von ihnen durch zwei verschiedene analytische Prozesse gelangen können. Die Gleichungen

*) $F_{2p} = \dfrac{\partial F_2(p, q)}{\partial p}$, usw. **) $\Phi_{2x'} = \dfrac{\partial \Phi_2(x', y', z')}{\partial x'}$, usw.

$F_1 = 0$, bzw. $F_2 = 0$ stellen die Kurven $\varphi_{1\infty}$ bzw. $\varphi_{2\infty}$ in nicht-homogenen Linienkoordinaten (p, q) dar (cf. § 1 des 7. Kap., pag. 262). Homogenisieren wir diese Gleichungen vermöge der Substitution

$$p = -\frac{p'}{r'}, \quad q = -\frac{q'}{r'} \tag{19}$$

oder

$$p : q : -1 = p' : q' : r', \tag{19'}$$

so erhalten wir die Gleichungen dieser Kurven in homogenen Linienkoordinaten $(p' : q' : r')$.

Die hervorgehenden Gleichungen

$$\Phi_2(p', q', r') = 0 \quad \} \varphi_{1\infty} \tag{20}$$

und

$$\Phi_1(p', q', r') = 0 \quad \} \varphi_{2\infty} \tag{21}$$

unterscheiden sich natürlich, wie aus ihrer Ableitung erhellt, nur durch die Bezeichnung der Variabelen von den Gleichungen

$$\Phi_2(x', y', z') = 0 \quad \} \varphi_{2\infty} \tag{13'}$$

und

$$\Phi_1(x', y', z') = 0 \quad \} \varphi_{1\infty}, \tag{12'}$$

welche die Kurven $\varphi_{2\infty}$ bzw. $\varphi_{1\infty}$ in homogenen Punktkoordinaten $(x' : y' : z')$ definieren. Daraus schließen wir, daß die Kurve $\varphi_{1\infty}$ in homogenen Punktkoordinaten $(x' : y' : z')$ durch dieselbe Gleichung dargestellt wird wie die Kurve $\varphi_{2\infty}$ in homogenen Linienkoordinaten $(p' : q' : r')$ [und umgekehrt]. Diese Beziehung zwischen den Gleichungen der Kurven $\varphi_{1\infty}$ und $\varphi_{2\infty}$ findet ihre Erklärung in der Tatsache, daß $\varphi_{1\infty}$ und $\varphi_{2\infty}$ zu einander polarreziprok sind in bezug auf den unendlich fernen imaginären Kugelkreis

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0 \tag{22}$$

und läßt sich auf Grund dieser Tatsache auch direkt*) erkennen.

Die Beziehungen zwischen den Differentialgleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ sind durchaus gegenseitiger Natur. Die Charakteristiken der einen sind die Normalen der Integralflächen der anderen und umgekehrt. Ist eine beliebige Integralfläche der Differentialgleichung $F_1 = 0$ gegeben, also irgend eine dem Komplexe $\Phi_1 = 0$ angehörige Developpabele, und konstruieren wir deren Flächennormalen längs einer beliebigen Orthogonaltrajektorie der Erzeugenden, so bilden diese eine Developpabele des Komplexes $\Phi_2 = 0$, d. h. eine Integralfläche der Differentialgleichung

*) Schreiben wir nämlich die Gleich. des u. f. i. Kugelkreises in der Form $x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2 = 0$, so hat die Polare eines Punktes $P_\infty(x' : y' : z')$ die Gleich. $x'x_0' + y'y_0' + z'z_0' = 0$, besitzt also die Linienkoordinaten $p' : q' : r' = x' : y' : z'$.

$F_2 = 0$. Die Schnittlinie der beiden genannten Developpabelen ist auch Orthogonaltrajektorie der Erzeugenden der letzteren.

Besond. Klasse von nicht-linearen Diffgln der gesuchten Art: Diffgln, bei denen die Norm. der Integralfln u. d. Char. einem und demselben Linienkompl. angeh.

Unter den nicht-linearen partiellen Differentialgleichungen der in unserer Aufgabe gesuchten Art spielen offenbar diejenigen eine ausgezeichnete Rolle, bei denen *die Normalen der Integralflächen und die geradlinigen Charakteristiken* nicht (wie im allgemeinen) zwei verschiedenen, sondern *einem und demselben* nicht-linearen *Komplexe angehören.* Mit dieser besonderen Klasse von Differentialgleichungen wollen wir uns im folgenden kurz befassen. Die Elementarkegel einer partiellen Differentialgleichung dieser Art

$$F_{12}(p, q) = 0 \tag{23}$$

sind gleichzeitig Komplexkegel des Linienkomplexes

$$\Phi_{12}(dx, dy, dz) = 0, \tag{24}$$

dem die Normalen der Integralflächen angehören. Sie sind also zu sich selbst supplementär und schneiden daher die unendlich ferne Ebene nach einer Kurve $\varphi_{12,\infty}$, die zu sich selbst reziprok ist in bezug auf den unendlich fernen imaginären Kugelkreis. Es ist klar, daß die Frage nach allen Differentialgleichungen $F_{12} = 0$ der in Rede stehenden Art vollkommen äquivalent ist mit der Frage nach allen derartigen Kurven $\varphi_{12,\infty}$. Ist $P_{1\infty}$ ein beliebiger Punkt einer solchen Kurve $\varphi_{12,\infty}$, so berührt die Polare des Punktes $P_{1\infty}$ die Kurve $\varphi_{12,\infty}$ in einem Punkte $P_{2\infty}$; die Polare dieses Punktes $P_{2\infty}$ tangiert die Kurve $\varphi_{12,\infty}$ im Punkte $P_{1\infty}$. $\varphi_{12,\infty}$ besteht aus ∞^1 Paaren in dieser Weise einander zugeordneter Punkte $P_{1\infty}$, $P_{2\infty}$. Verbinden wir einen beliebigen Raumpunkt P mit allen Punkten der Kurve $\varphi_{12,\infty}$, so erhalten wir den Elementarkegel K_{12}, den der entsprechende Komplex $\Phi_{12} = 0$, bzw. die zugehörige partielle Differentialgleichung $F_{12} = 0$ diesem Punkte zuweist. Je zwei Mantellinien, die von P nach einander zugeordneten Punkten $P_{1\infty}$, $P_{2\infty}$ führen, stehen aufeinander senkrecht. Konstruieren wir in P die Normalebene zur einen von zwei derartigen Mantellinien, so berührt diese den Kegel K_{12} längs der anderen. Im allgemeinen sind zwei in der besprochenen Weise einander zugeordnete Punkte $P_{1\infty}$, $P_{2\infty}$ voneinander verschieden.

In dem Spezialfalle, in dem je zwei solche Punkte stets zusammenfallen, ist die Kurve $\varphi_{12,\infty}$ mit dem unendlich fernen imaginären Kugelkreis identisch. Der entsprechende Komplex Φ_{12} hat die Gleichung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0. \qquad \} \Phi_{12} \equiv \Phi_1 \equiv \Phi_2 \tag{25}$$

Die zugehörige partielle Differentialgleichung lautet

$$p^2 + q^2 + 1 = 0. \qquad \} F_{12} \equiv F_1 \equiv F_2 \tag{26}$$

Die Charakteristiken dieser Differentialgleichungen sind die Geraden des Komplexes (25), d. h. die Minimalgeraden. Diese können in der Tat gleichzeitig als Haupttangentenkurven und als Normalen der Integralflächen (nämlich der Minimaldeveloppabelen und Minimalebenen) aufgefaßt werden*). Wie sich unsere analytischen Betrachtungen in diesem besonderen Falle gestalten, ist ohne Rechnung zu überblicken.

Von diesem als erledigt anzusehenden Spezialfalle wollen wir jetzt absehen. Es sei nun eine beliebige Integralfläche J irgendeiner partiellen Differentialgleichung $F_{12} = 0$ der in Rede stehenden Klasse gegeben, also eine Developpabele, die eine zu sich selbst reziproke Kurve $\varphi_{12,\infty}$ enthält. Konstruieren wir dann die ∞^1 Developpabelen, die von den Normalen der Integralfläche J längs der Orthogonaltrajektorien ihrer Erzeugenden gebildet werden, so erhalten wir ∞^1 weitere Integralflächen derselben Differentialgleichung. Natürlich sind auch die ∞^1 Parallelflächen der Fläche J Integralflächen der nämlichen Differentialgleichung (cf. § 4 des 14. Kap., pag. 679). Ist also eine Integralfläche J einer derartigen partiellen Differentialgleichung vorgelegt, so können wir sofort zwei Systeme von je ∞^1 Integralflächen dieser Differentialgleichung bestimmen, welche die Eigenschaft haben, daß jede Fläche des einen Systemes jede Fläche des anderen nach einer Kurve schneidet, die auf beiden Krümmungslinie ist. Eine Kategorie von solchen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung $F_{12} = 0$, deren Elementarkegel zu sich selbst supplementäre Komplexkegel sind, können wir sofort angeben. Offenbar stellt jede partielle Differentialgleichung, deren Elementarkegel parallel gestellte Rotationskegel mit dem Öffnungswinkel**) 45^0 sind, eine derartige Differentialgleichung dar. Diese Differentialgleichungen werden wir aber erst in § 3 [cf. Seite 23] wirklich aufstellen, da wir an dieser Stelle unnötig ausführlich sein müßten. Wir werden dann auch ein Verfahren entwickeln, durch das wir alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung $F_{12} = 0$ erhalten, die zu sich selbst supplementäre Komplexkegel als Elementarkegel haben.

§ 3. Beitrag zur Lösung des Problemes (1, 6).

„Gesucht sind alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung $F(x, y, z, p, q) = 0$, deren Charakteristiken auf allen

*) Daß manche Autoren im Gegensatz zu Lie von Haupttangentenkurven auf Minimaldeveloppabelen überhaupt nicht sprechen, kann für uns nicht maßgebend sein.

**) Unter Öffnungswinkel eines Kreiskegels verstehen wir dabei den Winkel einer beliebigen Mantellinie mit der Achse des Kegels.

Integralflächen Haupttangentenkurven sind und deren Integralflächen ∞^1 geodätische Linien enthalten, die einem Linienkomplexe angehören."

Zentrakegel eines Elementarkegels.

Um die Darstellung unserer Überlegungen zu vereinfachen, wollen wir zunächst eine abkürzende Redeweise vereinbaren. Ist ein beliebiger Elementarkegel vorgegeben und konstruieren wir das Umhüllungsgebilde aller Flächenelemente, die längs seiner Mantellinien auf seinen Tangentenebenen senkrecht stehen, so erhalten wir einen zweiten Elementarkegel mit derselben Spitze. Diesen Elementarkegel wollen wir kurz als den *Zentrakegel* des ersten bezeichnen. Mit Hilfe dieser Ausdrucksweise können wir das in § 4 des 14. Kap. (von Lies „Geom. d. Berühr.transf.") auf S. 685 gewonnene Ergebnis *für unsere Zwecke*, wie folgt, aussprechen: Die Elementarkegel der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, deren Integralflächen ∞^1 geodätische Kurven enthalten, die einem vorgelegten Linienkomplexe angehören, sind die Zentrakegel der Elementarkegel dieses Komplexes.

Wir wollen nun damit beginnen, eine für unsere Behandlung der Aufgabe grundlegende Betrachtung anzustellen. Es sei ein beliebiger Linienkomplex Φ durch die Monge'sche Gleichung

$$(1) \qquad \Phi(y\,dz - z\,dy,\ z\,dx - x\,dz,\ x\,dy - y\,dx,\ dx,\ dy,\ dz) = 0$$

Zentrakegel zweier zueinander supplementärer Elementarkegel.

gegeben, in der Φ eine homogene Funktion ihrer Argumente bedeutet. Wir fassen dann den Komplexkegel K_1 ins Auge, den dieser Komplex irgendeinem Raumpunkte P zuweist, sowie den zu ihm supplementären Elementarkegel K_2. Zu jeder nicht-singulären Mantellinie m_1 des Kegels K_1 gibt es eine zu ihr senkrechte Tangentenebene T_2 des Kegels K_2, die diesen längs einer und nur einer Mantellinie m_2 berührt. Das in P auf m_2 senkrecht stehende Flächenelement T_1 tangiert den Kegel K_1 längs der Mantellinie m_1. Je zwei in dieser Weise einander entsprechende Mantellinien m_1, m_2 schneiden sich in P rechtwinklig und bestimmen ein Flächenelement T_3 mit dem Träger P, das längs m_1 auf der Tangentenebene T_1 des Kegels K_1 und zugleich längs m_2 auf der Tangentenebene T_2 des Kegels K_2 senkrecht steht. Errichten wir im Punkte P das Lot m_4 des Flächenelementes T_3 und konstruieren alsdann die Enveloppe aller derartigen Flächenelemente T_3 und das Umhüllungsgebilde aller zugehörigen Lote m_4, so erhalten wir im Punkte P zwei weitere Elementarkegel K_3 bzw. K_4. Es ist klar, daß der Kegel K_3 der Zentrakegel des Kegels K_1 und zugleich der des Kegels K_2 ist. *Zwei zueinander supplementäre Elementarkegel besitzen also einen und denselben Zentrakegel.* Der Elementarkegel K_4 ist der zum Kegel K_3 supplementäre. Durch unsere Konstruktion ordnen wir

jedem Punkte des Raumes zwei Elementarkegel K_3, K_4 zu. Die Kegel K_3 sind die Elementarkegel der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

(2) $$G(x, y, z, p, q) = 0,$$

auf deren Integralflächen ∞^1 Kurven des Komplexes Φ geodätische Linien bilden; die Kegel K_4 bestimmen eine gewisse Monge'sche Gleichung

(3) $$M(x, y, z, dx, dy, dz) = 0.$$

Aufstellung d. Diffgl. $G = 0$, deren Integralfln ∞^1 geod. Linien enthalten, d. einem vorgegeb. Linienkompl. $\Phi = 0$ angehören.

Wir gehen nun dazu über, diese beiden Gleichungen (2) und (3) aus der Gleichung (1) des vorgelegten Linienkomplexes Φ abzuleiten. Schreiben wir letztere in der Form

(1′) $$\Phi(yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx', x', y', z') = 0,$$

so können wir sie — x, y, z als Parameter und x', y', z' als Variabele ansehend — als die Gleichung des Elementarkegels K_1 auffassen, der dem Punkte $P(x, y, z)$ durch den vorgegebenen Linienkomplex Φ zugewiesen wird. Die Richtungscosinus der Normalen m_2 der Tangentenebene, welche den Kegel K_1 längs der durch die Verhältnisse $x' : y' : z'$ charakterisierten Mantellinie m_1 berührt, sind somit proportional mit $\Phi_{x'}, \Phi_{y'}, \Phi_{z'}$. Die durch m_1 gehende Tangentenebene des Elementarkegels K_3 ist mit der Ebene (m_1, m_2) identisch; daher sind die Richtungsgrößen ihrer Normale m_4 mit den Größen $\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}'$ proportional, die durch die Gleichungen

(4) $$\mathfrak{x}'x' + \mathfrak{y}'y' + \mathfrak{z}'z' = 0,$$

(5) $$\mathfrak{x}'\Phi_{x'} + \mathfrak{y}'\Phi_{y'} + \mathfrak{z}'\Phi_{z'} = 0$$

ihrem Verhältnisse nach bestimmt sind. Eliminieren wir aus den Gleichungen (1′), (4), (5) die homogen auftretenden Größen x', y', z', so ergibt sich eine Gleichung zwischen $x, y, z, \mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}'$, welche offenbar die Elementarkegel K_4 definiert. Ersetzen wir daher in dem Eliminationsresultate noch $\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}'$ durch dx, dy, dz, so erhalten wir die Monge'sche Gleichung (3). Aus dieser geht die partielle Differentialgleichung (2) sofort durch die Substitution

(6) $$dx : dy : dz = p : q : -1$$

hervor. Wir sehen, daß nur Differentiationen und Eliminationen erforderlich sind, um aus der Monge'schen Gleichung eines vorgelegten Linienkomplexes die partielle Differentialgleichung erster Ordnung herzuleiten, deren Integralflächen ∞^1 geodätische Kurven dieses Komplexes enthalten. Wie sich das entwickelte Verfahren zur Aufstellung dieser Differentialgleichung modifiziert, wenn der vorgelegte Komplex insbesondere ein linearer ist, werden wir noch besprechen.

Ermittelung d. linearen Diffgln d. gesuchten Art.

Nunmehr in die eigentliche Lösung unserer Aufgabe eintretend, wollen wir zunächst alle *linearen* partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ermitteln, welche die beiden verlangten Eigenschaften besitzen. Wir erkennen unmittelbar, daß die Zentrakegel K_3 der Elementarkegel K_1 eines Linienkomplexes dann und nur dann in Ebenenbüschel ausarten, wenn die Kegel K_1 entweder in ebene Strahlenbüschel degenerieren, oder aber Rotationskegel sind. Daraus folgt, daß unter den in der Aufgabe verlangten Differentialgleichungen diejenigen und nur diejenigen linear sind, bei denen der Linienkomplex, dem die ∞^1 geodätischen Komplexkurven der Integralflächen angehören, entweder linear ist oder aber lauter Kreiskegel zu Komplexkegeln hat. Wir wollen diese beiden Fälle getrennt behandeln.

1. Fall: D. Linienkompl., dem d. ∞^1 geod. Kompl.-kurven d. Integralfln angehör., ist linear.

Liegt der erste Fall vor, wird der einem beliebigen Raumpunkte P durch den gegebenen Komplex zugewiesene Kegel K_1 also zu einer Ebene, dann artet nicht nur der Zentrakegel K_3, sondern auch der zu K_1 supplementäre Elementarkegel K_2 in das Elementarbüschel aus, dessen Achse in P auf der genannten Ebene senkrecht steht (während der Elementarkegel K_4 dann ebenfalls in die erwähnte Ebene degeneriert). Hieraus ergibt sich, daß die partielle Differentialgleichung erster Ordnung, deren Integralflächen ∞^1 geodätische Kurven eines linearen Komplexes enthalten, identisch ist mit der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, deren Integralflächen lauter Geraden dieses Komplexes zu Normalen haben. Verlaufen also auf den Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung ∞^1 geodätische Kurven eines linearen Komplexes, dann gehören die Normalen der Integralflächen von selbst einem linearen Komplexe an (und zwar dem nämlichen); haben umgekehrt die Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung lauter Geraden eines linearen Komplexes zu Normalen, dann enthalten sie von selbst ∞^1 geodätische Kurven, die einem linearen Komplexe angehören (und zwar demselben). Die hier vorliegende Frage nach allen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken auf den Integralflächen Haupttangentenkurven sind und deren Integralflächen ∞^1 geodätische Kurven eines linearen Komplexes aufweisen, ist sonach vollkommen gleichbedeutend mit der auf Seite 3 der vorliegenden Arbeit beantworteten Frage nach der Gesamtheit aller partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken Haupttangentenkurven auf den Integralflächen bilden und deren Integralflächen lauter Geraden eines linearen Komplexes zu Normalen haben. Unter Benutzung der zitierten Stelle können wir

Ergebnis im 1. Falle.

mithin sofort das folgende Ergebnis aussprechen: *„Die einzigen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken auf*

allen Integralflächen Haupttangentenkurven sind und deren Integralflächen ∞^1 geodätische Kurven enthalten, die einem linearen Komplexe angehören, sind die von der Form

$$ap + bq - c = 0, \tag{7}$$

in der a, b, c Konstanten bedeuten. Diese Differentialgleichung hat als Charakteristiken die ∞^2 Geraden, deren Richtungscosinus mit a, b, c proportional sind. Die in Rede stehenden geodätischen Kurven der Integralflächen gehören dem speziellen Nullsysteme

$$adx + bdy + cdz = 0 \tag{8}$$

an und sind auf den Integralflächen offenbar die Orthogonaltrajektorien der Charakteristiken." In dem soeben behandelten Falle geht die gesuchte partielle Differentialgleichung aus der Gleichung des linearen Komplexes, dessen Kurven auf den Integralflächen geodätische Linien bilden, direkt durch die Substitution (6) hervor, was seinen Grund darin hat, daß hier die Monge'sche Gleichung (3) mit der Gleichung dieses Komplexes (wegen des Zusammenfallens von K_1 und K_4) identisch ist.

2. Fall: D. Linienkompl., dem d. ∞^1 geod. Kompl.-kurven d. Integralfln angehör., hat lauter Rotationskegel zu Kompl.-kegeln.

Wie wir gesehen haben, ist eine Differentialgleichung der in unserer Aufgabe verlangten Art nur noch in einem zweiten Falle linear, nämlich dann, wenn der Linienkomplex, dem die geodätischen Komplexkurven der Integralflächen angehören, lauter Rotationskegel zu Elementarkegeln hat. Diesen Fall wollen wir jetzt erledigen. Wir werfen daher zunächst die Frage auf: *Wie lautet die Monge'sche Gleichung des allgemeinsten Linienkomplexes, dessen Komplexkegel Rotationskegel sind?* Bei der Behandlung dieser Frage gehen wir von der Erwägung aus, daß jede Monge'sche Gleichung, wofern wir x, y, z in ihr als Parameter auffassen und dx, dy, dz durch x', y', z' ersetzen, offenbar auch als Gleichung des (in den Koordinaten x', y', z' geschriebenen) Elementarkegels gedeutet werden kann, den sie dem beliebigen Punkte (x, y, z) zuweist. Die gesuchte Monge'sche Gleichung muß also, in dieser Weise interpretiert, einen beliebigen Kreiskegel darstellen, d. h. einen Kegel, der den zu seiner Spitze gehörigen absoluten Kegel längs zweier Mantellinien berührt. Sie läßt sich folglich in der Form

Ermittelung aller derartigen Linienkompl.

$$[\alpha(x,y,z)\,x' + \beta(x,y,z)\,y' + \gamma(x,y,z)z']^2 - \lambda^2(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0 \tag{9}$$

ansetzen. Dabei ist unter λ^2 ein Parameter zu verstehen und die Bestimmung der Funktionen $\alpha(x, y, z)$, $\beta(x, y, z)$, $\gamma(x, y, z)$ in allgemeinster Weise so vorzunehmen, daß die Gleichung (9) die für die Gleichung eines Linienkomplexes charakteristische Gestalt besitzt, also homogen in den sechs Argumenten $yz' - zy'$, $zx' - xz'$, $xy' - yx'$, x', y', z' ist. Wir erkennen hiernach leicht, daß *die denkbar allgemeinste Monge'sche*

Gleichung, die einen Linienkomplex definiert, dessen Komplexkegel Rotationskegel sind, die folgende ist:

$$[A(yz'-zy')+B(zx'-xz')+C(xy'-yx')+Dx'+Ey'+Fz']^2 - \lambda^2(x'^2+y'^2+z'^2)=0 \tag{10}$$

oder in anderer Schreibweise

Monge'sche Gl. d. allgemeinsten Linienkompl., dessen Kompl.-kegel Rotationskegel sind.

$$[A(ydz-zdy)+B(zdx-xdz)+C(xdy-ydx)+Ddx+Edy+Fdz]^2 - \lambda^2(d^2x+d^2y+d^2z)=0 \tag{11}$$

oder

$$[(Bz-Cy+D)dx+(Cx-Az+E)dy+(Ay-Bx+F)dz]^2 - \lambda^2(d^2x+d^2y+d^2z)=0. \tag{11a}$$

Hierbei haben wir gesetzt:

$$\begin{cases} \alpha(x,y,z)\equiv Bz-Cy+D \\ \beta(x,y,z)\equiv Cx-Az+E \\ \gamma(x,y,z)\equiv Ay-Bx+F. \end{cases} \tag{12}$$

In Gleichung (11) bedeuten $A, B, C, D, E, F, \lambda$ beliebige Konstanten. Da gerade sechs von ihnen als wesentlich anzusehen sind, gibt es insgesamt ∞^6 Linienkomplexe, deren Komplexkegel Rotationskegel sind. Bis auf Weiteres nehmen wir an, die Konstanten in Gleichung (11) seien beliebig aber fest gewählt, sodaß diese Gleichung einen allgemeinen aber bestimmten Komplex definiert, der Kreiskegel zu Komplexkegeln hat. Wir wollen nun in dem beliebigen Punkte (x, y, z) die Fortschrittsrichtung $(\delta x : \delta y : \delta z)$ betrachten, deren Richtungsgrößen mit den an dieser Stelle genommenen Werten der Funktionen $\alpha(x, y, z)$, $\beta(x, y, z)$, $\gamma(x, y, z)$ proportional sind:

$$\begin{cases} \delta x=\alpha(x,y,z)\delta t=(Bz-Cy+D)\delta t \\ \delta y=\beta(x,y,z)\delta t=(Cx-Az+E)\delta t \text{ *)} \\ \delta z=\gamma(x,y,z)\delta t=(Ay-Bx+F)\delta t. \end{cases} \tag{13}$$

Diese Fortschrittsrichtung ist offenbar die Achsenrichtung des Rotationskegels, den die Gleichung (11) dem Punkte (x, y, z) zuweist. Berechnen wir nämlich den Cosinus des Winkels ω, den sie mit einer ganz beliebigen Fortschrittsrichtung $(dx : dy : dz)$ im Punkte (x, y, z) einschließt

$$\cos\omega=\frac{(Bz-Cy+D)dx+(Cx-Az+E)dy+(Ay-Bx+F)dz}{\sqrt{(Bz-Cy+D)^2+(Cx-Az+E)^2+(Ay-Bx+F)^2}\cdot\sqrt{d^2x+d^2y+d^2z}}, \tag{14}$$

so sehen wir, daß dieser Winkel ω für alle dem genannten Komplex-

*) Einen Teil der in gegenwärtiger Entwicklung angewandten Bezeichnungen entlehnen wir absichtlich der Betrachtung in § 3 des 6. Kap., pag. 206 u. flg., die von linearen Komplexen handelt.

kegel angehörenden Fortschrittsrichtungen $(dx : dy : dz)$ einen und denselben Wert besitzt; denn für diese ist

$$(\overline{14}) \qquad \cos\bar{\omega} = \frac{\lambda}{\sqrt{(Bz - Cy + D)^2 + (Cx - Az + E)^2 + (Ay - Bx + F)^2}}.$$

Wir erkennen auch sofort, daß die durch die Gleichungen (13) bestimmte Richtung $(\delta x : \delta y : \delta z)$ zugleich die Achsenrichtung aller ∞^1 Rotationskegel ist, die dem beliebigen Punkte (x, y, z) durch die ∞^1 Linienkomplexe zugewiesen werden, welche die Gleichung (11) bei variabelem λ darstellt $[\lambda \neq \infty,\ (\lambda \neq 0)]$. Alle in der Form (11) enthaltenen Komplexe, deren Monge'sche Gleichungen bis auf den Wert der Konstante λ übereinstimmen, ordnen also einem beliebigen Punkte (x, y, z) Rotationskegel zu, welche dieselbe Achse besitzen und sich nur durch die Öffnungswinkel unterscheiden. Letztere stehen in der durch die Gleichung $(\overline{14})$ zum Ausdruck gebrachten funktionalen Abhängigkeit vom Werte der Konstanten λ und dem der Ortsveränderlichen (x, y, z). Setzen wir für λ den Wert Null, so stellt die Gleichung (11) den (doppelt zu rechnenden) linearen Komplex

$$(15) \qquad \begin{aligned} &A(ydz - zdy) + B(zdx - xdz) + C(xdy - ydx) \\ &\qquad + Ddx + Edy + Fdz = 0 \end{aligned}$$

dar. Damit steht in Einklang, daß für $\lambda = 0$ der Öffnungswinkel $\bar{\omega} = 90^0$ wird. Sind die ∞^1 Linienkomplexe gegeben, welche die Gleichung (11) definiert, wenn λ alle endlichen, von Null verschiedenen Werte annimmt, so können wir, wie nunmehr klar, sofort ein Nullsystem angeben — nämlich das durch die Gleichung (15) bestimmte —, dem die Eigenschaft zukommt, daß die einem beliebigen Punkte durch das Nullsystem zugewiesene Nullebene auf der gemeinschaftlichen Achse der ∞^1 Rotationskegel senkrecht steht, die dem Punkte durch die gegebenen Komplexe zugeordnet werden. Ist umgekehrt der beliebige lineare Komplex (15) vorgelegt, so sind wir imstande unmittelbar die Gleichung (11) anzuschreiben, in der wir λ als variabelen Parameter auffassen, und erhalten dadurch ∞^1 Linienkomplexe von der Beschaffenheit, daß die ∞^1 einem beliebigen Punkte durch sie zugewiesenen Rotationskegel als gemeinsame Achse die Normale der Nullebene besitzen, die dem Punkte durch das gegebene Nullsystem zugeordnet wird. Nebenbei bemerkt, erklärt es sich hieraus geometrisch, daß es ∞^6 Linienkomplexe gibt, deren Komplexkegel Rotationskegel sind, wenn wir die Tatsache bedenken, daß die Zahl der Nullsysteme ∞^5 beträgt. Fassen wir nun wieder einen beliebigen, aber bestimmten Linienkomplex Φ ins Auge, dessen Komplexkegel Rotationskegel sind! Die Gleichung (11), in der jetzt auch λ einen festen, von Null verschiedenen Wert

habe, sei seine Monge'sche Gleichung. Der Zentrakegel K_3 des Rotationskegels K_1, den dieser Komplex einem beliebigen Raumpunkte $P(x, y, z)$ zuweist, artet in das Elementarbüschel aus, dessen Träger die Achse des Kegels K_1 ist. Jede Ebene T_3 dieses Büschels schneidet den Kegel K_1 längs zweier Mantellinien m_1, m'_1, die mit der Rotationsachse beide denselben Winkel $\overline{\omega}$ bilden, und steht auf den Ebenen T_1 und T'_1 senkrecht, welche den Kegel K_1 längs m_1 bzw. m'_1 berühren. Hieraus schließen wir (unter Berücksichtigung der bereits zitierten Stelle in § 4 des 14. Kap., pag. 685), daß das Elementarbüschel dem Punkte P durch eine lineare partielle Differentialgleichung zugewiesen wird, deren Integralflächen zwei Systeme von je ∞^1 geodätischen Linien enthalten, die dem Komplexe Φ angehören und die Eigenschaft besitzen, daß in jedem Punkte einer Integralfläche die Kurve des einen Systems mit der hindurchgehenden Charakteristik denselben Winkel $\overline{\omega}$ einschließt, wie die Kurve des anderen. Wie Gleichung (14) lehrt, ändert sich dieser Winkel $\overline{\omega}$ im allgemeinen von Punkt zu Punkt und bleibt dann und nur dann konstant, wenn in der Monge'schen Gleichung des Komplexes Φ insbesondere $A = B = C = 0$ ist, worauf wir vorläufig nicht eingehen wollen. Nach früherem ist klar, daß die Elementarbüschel der genannten partiellen Differentialgleichung gleichzeitig als Zentrakegel der Komplexkegel aller ∞^1 Linienkomplexe aufgefaßt werden können, deren Monge'sche Gleichungen sich nur durch den Wert der Konstante λ von der des Komplexes Φ unterscheiden. Alles, was in bezug auf den Komplex Φ ausgesagt wurde, gilt natürlich bezüglich jedes dieser ∞^1 Linienkomplexe. Die Integralflächen der in Rede stehenden partiellen Differentialgleichung enthalten also von jedem dieser ∞^1 Komplexe je ∞^1 geodätische Kurven, die sich ebenso wie die dem Komplexe Φ angehörigen in je zwei Systemen der geschilderten Art anordnen. Jede geodätische Linie einer Integralfläche der betrachteten Differentialgleichung gehört einem der genannten Komplexe an. Die (eigentlich doppelt zu rechnenden) Orthogonaltrajektorien der Charakteristiken auf den Integralflächen sind geodätische Kurven des linearen Komplexes (15), dessen Gleichung sich aus der des Komplexes Φ für $\lambda = 0$ ergibt. [Diesem Komplexe gehören auch die Normalen der Integralflächen an.] Ist also durch die Gleichung (11) ein beliebiger Linienkomplex gegeben, dessen Komplexkegel Rotationskegel sind, so besitzt die lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung, deren Integralflächen ∞^1 geodätische Kurven dieses Komplexes enthalten, die Eigenschaft, daß ihre Integralflächen auch ∞^1 geodätische Kurven eines linearen Komplexes, nämlich des Komplexes (15), enthalten. Ist umgekehrt durch die Gleichung (15) ein beliebiger linearer Komplex

vorgelegt, so hat die partielle Differentialgleichung erster Ordnung, deren Integralflächen ∞^1 geodätische Kurven dieses Komplexes enthalten, die Eigenschaft, daß ihre Integralflächen auch zwei Systeme von je ∞^1 geodätischen Kurven eines jeden der bei variabelem λ durch die Gleichung (11) definierten Linienkomplexe aufweisen. Hiernach ist klar, daß die Frage nach allen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken auf den Integralflächen ∞^1 geodätische Kurven eines Linienkomplexes enthalten, der Rotationskegel zu Komplexkegeln hat, völlig äquivalent ist mit der Aufgabe alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu ermitteln, deren Charakteristiken auf den Integralflächen Haupttangentenkurven bilden und deren Integralflächen ∞^1 geodätische Kurven eines linearen Komplexes enthalten. Alle derartigen Differentialgleichungen haben wir aber schon auf S. 14 ermittelt. Außer den dort gefundenen Differentialgleichungen von der Form der Gleichung

$$ap + bq - c = 0 \tag{7}$$

gibt es also *keine weiteren* linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, welche die beiden in unserer Aufgabe verlangten Eigenschaften besitzen. Während wir früher aber nur gesehen hatten, daß die Orthogonaltrajektorien der Charakteristiken auf den Integralflächen der Differentialgleichung (7) geodätische Kurven des linearen Komplexes

Ergebnis im 2. Falle.

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0 \tag{8}$$

sind, dem auch die Normalen der Integralflächen angehören, haben wir jetzt erkannt, daß überhaupt jede geodätische Kurve der Integralflächen einem Linienkomplexe angehört und zwar einem der ∞^1 Komplexe, welche die Monge'sche Gleichung

$$(a\,dx + b\,dy + c\,dz)^2 - \lambda^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0 \tag{16}$$

definiert, wenn λ einen variabelen Parameter bedeutet; wir haben dabei die Konstanten D, E, F neuerdings mit a, b, c bezeichnet. Die Komplexkegel jedes einzelnen dieser Linienkomplexe haben denselben Öffnungswinkel und sind untereinander gleich gestellt. [Dieser Öffnungswinkel wird durch die Gleichung

$$\cos\bar{\omega} = \frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{17}$$

bestimmt.] Die geodätischen Linien der Integralflächen der Differentialgleichung (7) sind also die Isogonaltrajektorien der auf diesen verlaufenden Charakteristiken, was klar, da die Integralflächen dieser Differentialgleichung Zylinder, die Charakteristiken deren Mantellinien sind.

Ermittelung v. nicht-linearen Diffgln d. gesuchten Art.

Wir gehen nunmehr zur Behandlung der Frage nach den *nicht-linearen* partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung über, welche die verlangten Eigenschaften besitzen.

Analyt. Ansatz.

Es sei ein beliebiger Linienkomplex Φ vorgelegt, der jedoch nicht linear sei und nicht lauter Rotationskegel zu Komplexkegeln habe. Seine Monge'sche Gleichung

$$(1) \qquad \Phi(y\,dz - z\,dy,\ z\,dx - x\,dz,\ x\,dy - y\,dx,\ dx,\ dy,\ dz) = 0$$

sei also nicht in den Formen (15) bzw. (11) enthalten. Nach dem auf Seite 13 entwickelten Verfahren können wir dann sofort die nicht-lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$(2) \qquad G(x, y, z, p, q) = 0$$

ermitteln, deren Integralflächen ∞^1 geodätische Kurven (im eigentlichen Sinne) des Komplexes Φ enthalten. Soll diese Differentialgleichung auch die Eigenschaft haben, daß ihre Charakteristiken auf den Integralflächen Haupttangentenkurven bilden, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß die Gleichung

$$(18) \qquad (G_x + G_z p)\,G_p + (G_y + G_z q)\,G_q = 0$$

infolge von $G = 0$ (cf. § 1 des 14. Kap., pag. 640) oder identisch besteht.

Geom. Ansatz.

Nachdem wir die vorliegende Frage analytisch bis zu einem gewissen Grade beantwortet haben, wollen wir sie jetzt auch geometrisch in Angriff nehmen. Wie an früherer Stelle besprochen, sind die Elementarkegel der partiellen Differentialgleichung $G = 0$, deren Integralflächen ∞^1 geodätische Kurven des Komplexes Φ enthalten, die Zentrakegel K_3 der Komplexkegel K_1 dieses Komplexes. Da die Charakteristiken einer nicht-linearen partiellen Differentialgleichung $G = 0$ (nach Theorem 25 in § 1 des 14. Kap., pag. 639) dann und nur dann Haupttangentenkurven auf den Integralflächen sind, wenn $G = 0$ die partielle Differentialgleichung eines nicht-linearen Komplexes ist, so erkennen wir, daß zu dem vorgelegten Komplex Φ dann und nur dann eine nicht-lineare partielle Differentialgleichung $G = 0$ gefunden werden kann, welche die beiden verlangten Eigenschaften zugleich besitzt, wenn die Zentrakegel K_3 seiner Komplexkegel K_1 einem nicht-linearen Komplexe angehören. Eine Kategorie von derartigen Komplexen Φ können wir unmittelbar angeben. Es sind dies alle nicht in der Form (16) enthaltenen nicht-linearen Komplexe, deren Monge'sche Gleichungen von x, y, z frei sind. Die Gleichung

Ermittelung einer Klasse von Diffgln der verlangten Art.

$$(19) \qquad \Phi_1(dx, dy, dz) = 0$$

stelle den allgemeinsten Komplex dieser Art dar. Da seine Komplexkegel K_1 untereinander kongruent und parallel gestellt sind, ist dies

auch bei deren Zentrakegeln K_3 der Fall. Diese sind also ebenfalls Komplexkegel eines nicht-linearen Komplexes

(20) $$\Phi_3(dx, dy, dz) = 0.$$

Die (nach dem angegebenen Verfahren aus $\Phi_1 = 0$ zu ermittelnde) nicht-lineare partielle Differentialgleichung

(21) $$G_3(p, q) = 0,$$

welche die Zentrakegel K_3 als Elementarkegel besitzt, deren Integralflächen also ∞^1 geodätische Kurven des Komplexes $\Phi_1 = 0$ enthalten, hat als Charakteristiken gerade Linien, die stets Haupttangentenkurven auf den Integralflächen bilden. Die partielle Differentialgleichung $G_3 = 0$ hat also tatsächlich die beiden verlangten Eigenschaften. Ihre Integralflächen sind die Developpabelen, welche die in der unendlich fernen Ebene gelegene Kurve $\varphi_{3\infty}$ enthalten, die in homogenen Punktkoordinaten $(x' : y' : z')$ durch die Gleichung $\Phi_3(x', y', z') = 0$, in nicht-homogenen Linienkoordinaten (p, q) durch die Gleichung $G_3(p, q) = 0$ dargestellt wird. Wie wir bei Behandlung der Aufgabe (1, 4) ausführten, sind die zu den Komplexkegeln K_1 supplementären Elementarkegel K_2 ebenfalls untereinander kongruent und gleich gestellt und gehören einem nicht-linearen Komplexe

(22) $$\Phi_2(dx, dy, dz) = 0$$

an. Nun sind aber nach unseren Betrachtungen auf Seite 12 die Zentrakegel K_3 der Komplexkegel K_1 gleichzeitig die Zentrakegel der zu den Kegeln K_1 supplementären Komplexkegel K_2. Daraus folgt, daß die Integralflächen der Differentialgleichung $G_3 = 0$ auch ∞^1 geodätische Kurven des Komplexes $\Phi_2 = 0$ enthalten. Um den Verlauf der beiden in Rede stehenden Systeme geodätischer Komplexkurven auf den Integralflächen der Differentialgleichung $G_3 = 0$ zu untersuchen, wollen wir in irgendeinem Punkte P einer beliebigen ihrer Integralflächen die Komplexkegel K_1, K_2, K_3 konstruieren. Die Tangentenebene dieser Integralfläche in P ist eine Tangentenebene T_3 des Komplexkegels K_3 und berührt diesen längs der durch P gehenden geradlinigen Erzeugenden g der Integralfläche, die eine Charakteristik von $G_3 = 0$ ist. Wie wir auf Seite 12 gesehen haben, wird T_3 vom Kegel K_1 längs einer Mantellinie m_1, vom Kegel K_2 längs einer Mantellinie m_2 senkrecht geschnitten. m_1 bzw. m_2 sind die Tangenten der (auf der Integralfläche) durch P gehenden geodätischen Komplexkurven des Komplexes $\Phi_1 = 0$ bzw. $\Phi_2 = 0$. Die Gerade g bildet mit m_1 einen Winkel ω_1, mit m_2 einen Winkel ω_2; m_1 und m_2 stehen aufeinander senkrecht [cf. Seite 12]*).

*) Nachweise in eckigen Klammern beziehen sich auf die vorliegende Arbeit.

Hieraus ergibt sich, daß auf jeder Integralfläche der Differentialgleichung $G_3 = 0$ die geodätischen Komplexkurven des Komplexes $\Phi_1 = 0$ (als 1. System) und die des Komplexes $\Phi_2 = 0$ (als 2. System) ein orthogonales Netz bilden*). Die Erzeugende g wird von sämtlichen Kurven des 1. Systemes unter dem Winkel ω_1, von sämtlichen Kurven des 2. Systemes unter dem Winkel ω_2 geschnitten. Dies erklärt sich daraus, daß sowohl die Kegel K_3 als auch die Kegel K_1 und die Kegel K_2 durch Translation ineinander übergehen, sodaß alle Verhältnisse unverändert bleiben, wenn P die Gerade g, also eine Mantellinie von K_3, durchläuft. Die Winkel ω_1 und ω_2 ändern sich im allgemeinen aber natürlich beim Übergang von einer Erzeugenden g zu einer anderen.

Die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Integralflächen lauter Geraden des Komplexes $\Phi_1 = 0$, bzw. $\Phi_2 = 0$ zu Normalen haben, seien, wie auf Seite 8, mit $F_2 = 0$ bzw. $F_1 = 0$ bezeichnet. Nach § 4 des 14. Kap., pag. 684 hat die partielle Differentialgleichung erster Ordnung, deren Integralflächen ∞^1 geodätische Kurven eines vorgelegten Linienkomplexes enthalten, die Zentraflächen der Integralflächen derjenigen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zu Integralflächen, deren Integralflächen lauter Geraden des gegebenen Komplexes zu Normalen haben. Aus unseren Entwicklungen folgt daher leicht, daß die Integralflächen der partiellen Differentialgleichung $G_3(p, q) = 0$ sowohl die Zentraflächen der Integralflächen von $F_1 = 0$, als auch die der Integralflächen von $F_2 = 0$ sind**). Wir könnten aus den vorstehenden Überlegungen noch eine Reihe teilweise recht interessanter Resultate ableiten***). Da diese für unser Thema jedoch ohne großen Belang sind, verzichten wir auf die Ausführung dieser naheliegenden Dinge. Überhaupt wollen wir auf den nicht-linearen Fall der Aufgabe (1, 6) nicht weiter eingehen. Eine methodische Behandlung dieses Falles führt auf schwierige Fragen aus der Theorie der Zentraflächen. Nur eine Tatsache wollen wir noch kurz erwähnen, nämlich, daß alle nicht-linearen partiellen Differentialgleichungen von der Form

Ermittelung einer weiteren Klasse v. Diffgln d verlangten Art.

$$F(p, q, z - px - qy) = 0 \tag{23}$$

*) Diese geodätischen Komplexkurven sind krummlinig.

**) Die Integralflächen von $G_3 = 0$ sind die Zentraflächen der Integralflächen von $F_1 = 0$ und $F_2 = 0$. Die Elementarkegel von $G_3 = 0$ sind die Zentrakegel der Elementarkegel von $F_1 = 0$ und $F_2 = 0$.

***) Durch Betrachtung der Beziehungen zwischen $\varphi_{2\infty}$ und den an früherer Stelle eingeführten Kurven $\varphi_{1\infty}$ und $\varphi_{2\infty}$; durch Untersuchung der Abwickelung der Integralflächen von $G_3 = 0$ in die Ebene; ferner durch Spezialisierung, sowie durch teilweise Umkehrung unserer bisherigen Ergebnisse.

offenbar die in der Aufgabe verlangten Eigenschaften besitzen: Die Charakteristiken jeder derartigen Differentialgleichung sind gerade Linien und bilden deshalb stets Haupttangentenkurven auf den Integralflächen. Letztere enthalten aber auch ∞^1 geodätische Linien eines Linienkomplexes. Denn die ∞^1 auf den Integralflächen verlaufenden geradlinigen Charakteristiken sind geodätische Linien der Integralflächen und gehören dem von den ∞^3 Charakteristiken gebildeten Linienkomplexe an. Bei den Differentialgleichungen von der Form (23) fällt das aus den Charakteristiken bestehende System der Haupttangentenkurven einer beliebigen Integralfläche insbesondere mit einem*) Systeme geodätischer Komplexkurven zusammen. Diese Differentialgleichungen sind die einzigen der verlangten Art, bei denen dies der Fall ist [cf. § 1, Seite 1].

Von einer *Zusammenfassung* unserer Ergebnisse, die viel Raum beanspruchen würde, sehen wir mit Rücksicht auf den Umfang der Arbeit ab.

Anhang.

Ermittelung aller p. Diffgln 1. O., deren Elementarkegel zu sich selbst supplementäre Kompl.-kegel sind.

Wie wir in § 2 in Aussicht gestellt haben [cf. Seite 11], wollen wir jetzt noch alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$F_{12}(p, q) = 0 \tag{24}$$

ermitteln, deren Elementarkegel zu sich selbst supplementäre Komplexkegel sind.

Wir haben bereits erwähnt, daß jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung, die parallel gestellte Rotationskegel vom Öffnungswinkel 45^0 zu Elementarkegeln hat, eine solche Differentialgleichung darstellt. Diese Klasse von Differentialgleichungen wollen wir zunächst bestimmen. Die Entwickelungen dieses Paragraphen lehren, daß die Monge'sche Gleichung

$$(a\,dx + b\,dy + c\,dz)^2 - \lambda^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0, \tag{16}$$

in der a, b, c, λ beliebige Konstanten bedeuten, den allgemeinsten Linienkomplex definiert, dessen Komplexkegel kongruente und gleich orientiente Rotationskegel sind [cf. Seite 16, 18, 19]. Da die Gleichung (16) drei wesentliche Konstanten enthält, gibt es, wie geometrisch sinnfällig, gerade ∞^3 derartige Komplexe. Der Öffnungswinkel $\bar{\omega}$ der Kegel des Komplexes (16) wird durch die Gleichung

$$\cos\bar{\omega} = \frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{17}$$

*) Bei den Differentialgleichungen $G_3(p, q) = 0$, die auch hierher gehören, haben wir mehr als ein System geodätischer Komplexkurven der Integralflächen kennen gelernt.

geliefert [cf. Seite 19]. Dieser Winkel $\bar{\omega}$ ist dann und nur dann gleich 45^0, wenn

$$\lambda = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}} \tag{25}$$

ist. Daraus folgt, daß die Gleichung

$$2(a\,dx + b\,dy + c\,dz)^2 - (a^2+b^2+c^2)(dx^2+dy^2+dz^2) = 0 \tag{26}$$

den allgemeinsten Komplex darstellt, der parallel gestellte Rotationskegel vom Öffnungswinkel $\bar{\omega} = 45^0$ zu Komplexkegeln hat. Die aus dieser Gleichung vermöge der Substitution

$$dx : dy : dz = p : q : -1 \tag{6}$$

hervorgehende Gleichung

$$2(ap + bq - c)^2 - (a^2+b^2+c^2)(p^2+q^2+1) = 0 \tag{27}$$

ist daher die allgemeinste partielle Differentialgleichung erster Ordnung, deren Elementarkegel solche Rotationskegel sind. Linienkomplexe vom Typus (26), bzw. partielle Differentialgleichungen von der Form (27) gibt es offenbar insgesamt ∞^2.

Nachdem wir in den Differentialgleichungen von der Gestalt (27) eine Klasse von Differentialgleichungen gefunden haben, deren Elementarkegel zu sich selbst supplementäre Komplexkegel sind, beschreiten wir jetzt einen Weg, auf dem wir, wie sich zeigen wird, zu allen übrigen derartigen Differentialgleichungen gelangen. Schreiben wir die Gleichung (26) in der Form

$$2(ax' + by' + cz')^2 - (a^2+b^2+c^2)(x'^2+y'^2+z'^2) = 0, \tag{26'}$$

so können wir sie als die Gleichung des Rotationskegels ansehen [geschrieben in den Koordinaten x', y', z'], den der Komplex (26) oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Differentialgleichung (27) dem Koordinatenanfangspunkt O zuweist. Würden wir den Größen a, b, c alle denkbaren Werte zulegen, so würde die Gleichung (26') alle ∞^2 Rotationskegel mit der Spitze O und dem Öffnungswinkel $\bar{\omega} = 45^0$ darstellen. Wir wollen nun aus diesem Systeme von ∞^2 Rotationskegeln irgendeine Schar von ∞^1 herausgreifen, etwa indem wir in Gleichung (26') a, b, c als beliebige Funktionen eines Parameters t wählen und alsdann t alle möglichen Werte durchlaufen lassen. Aus unseren Betrachtungen auf Seite 9 und 10 folgt dann leicht, daß das Umhüllungsgebilde K_{12} dieser ∞^1 Rotationskegel ein zu sich selbst supplementärer Kegel mit der Spitze O ist*). Die Gleichung dieses Kegels laute:

$$\Phi_{12}(x', y', z') = 0. \tag{28'}$$

*) Natürlich nur dann, wenn K_{12} irreduzibel.

Wir erhalten sie, indem wir die Gleichung (26′) nach t differentiieren und dann aus ihr und der durch Bildung der Ableitung entstehenden Gleichung den Parameter t eliminieren. Ersetzen wir jetzt in Gleichung (28′) die Größen x', y', z' durch dx, dy, dz, so ergibt sich die Monge'sche Gleichung

$$\Phi_{12}(dx, dy, dz) = 0, \tag{28}$$

welche als Komplexkegel alle Kegel besitzt, die mit dem zu sich selbst supplementären Kegel K_{12} kongruent und gleichgestellt sind. Die zugehörige partielle Differentialgleichung erster Ordnung, die aus der Gleichung (28) durch die Substitution (6) hervorgeht, ist eine Differentialgleichung der gesuchten Art. Es erscheint nun recht bemerkenswert, daß wir auf die geschilderte Weise [also durch Differentiationen und Eliminationen allein] überhaupt jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung $F_{12}(p, q) = 0$ herleiten können, deren Elementarkegel zu sich selbst supplementäre Komplexkegel sind. Dies folgt daraus, daß jeder zu sich selbst supplementäre Kegel K_{12} als Umhüllungsgebilde von ∞^1 Rotationskegeln mit dem Öffnungswinkel 45^0 aufgefaßt werden kann. Mit den hier ermittelten Differentialgleichungen $F_{12}(p, q) = 0$, deren interessante Eigenschaften wir teilweise schon in § 2 untersucht haben [cf. Seite 10 u. 11], werden wir uns in § 9 wieder beschäftigen.

§ 4. Lösung des Problemes (2, 3).

„Gesucht sind alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung $F(x, y, z, p, q) = 0$, deren Charakteristiken auf allen Integralflächen zugleich Krümmungslinien und geodätische Linien bilden."

Wir beabsichtigen unsere Lösung des Problemes auf zwei Sätze zu stützen, die sich bei Bianchi „Vorles. üb. Diff. geom." in § 84, pag. 166, wie folgt, ausgesprochen finden:

1) Wenn eine Krümmungslinie eine geodätische Linie ist, so ist sie eben.

2) Jede ebene geodätische Linie ist eine Krümmungslinie.

Natürlich ist der zweite Satz in seiner uneingeschränkten Allgemeinheit nicht ganz korrekt; denn eine gerade Linie einer Fläche ist wohl immer eine ebene geodätische Linie, aber nicht unter allen Umständen eine Krümmungslinie der Fläche. Entsprechend gehören nicht alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken gerade Linien sind, zur Kategorie der gesuchten Differentialgleichungen, sondern nur diejenigen, bei denen die geradlinigen Charakteristiken auf

allen Integralflächen Krümmungslinien bilden. Diese Differentialgleichungen wollen wir zunächst ermitteln. Wir wollen also zunächst das *Problem* (2, 5) erledigen:

Ermittelung derj. Diffgln d. gesuchten Kategorie, w. geradlin. Char. besitz.

„Gesucht sind alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung $F(x, y, z, p, q) = 0$, deren Charakteristiken gerade Linien sind, die auf allen Integralflächen Krümmungslinien bilden."

Erledigung des Problemes (2, 5).

Daß alle *nicht-linearen* partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit geradlinigen Charakteristiken, d. h. alle nicht-linearen partiellen Differentialgleichungen von der Form

$$F(p, q, z - px - qy) = 0, \tag{1}$$

die in Aufgabe (2, 5) und mithin auch die in Aufgabe (2, 3) verlangten Eigenschaften besitzen, ist klar. Da nämlich alle nicht-singulären Integralflächen einer derartigen Differentialgleichung abwickelbar sind (cf. § 1 des 7. Kap., pag. 266), stellen die Charakteristiken als geradlinige Erzeugenden stets Krümmungslinien auf allen nicht-singulären Integralflächen dar. Anders liegt die Sache bei den *linearen* partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit geradlinigen Charakteristiken. Die Charakteristiken einer linearen partiellen Differentialgleichung sind (nach Satz 7 in § 2 des 14. Kap., pag. 665) dann und nur dann Krümmungslinien auf allen Integralflächen, wenn sie entweder die Orthogonalkurven einer Schar von ∞^1 Kugeln, oder jedoch ∞^2 Minimalgeraden sind. Sollen die Charakteristiken einer linearen partiellen Differentialgleichung nun geradlinig sein, so bilden sie nach diesem Satze dann und nur dann Krümmungslinien auf allen Integralflächen, wenn sie entweder lauter Geraden eines Strahlenbündels oder ∞^2 Minimalgeraden sind. Die linearen partiellen Differentialgleichungen, deren Charakteristiken Strahlenbündel bilden, sind die von der Form

$$L(p, q, z - px - qy) = 0, \tag{2}$$

wenn L eine beliebige lineare Funktion ihrer Argumente bedeutet. Diese Form umfaßt nämlich die Differentialgleichungen von den Typen

$$(a - x)p + (b - y)q - (c - z) = 0 \tag{3}$$

und

$$ap + bq - c = 0 \tag{4}$$

und nur diese. Die Formen (3) bzw. (4) aber enthalten offenbar alle Differentialgleichungen, deren Charakteristiken Strahlenbündel (mit im Endlichen bzw. Unendlichen gelegenem Trägerpunkte) bilden. Die Integralflächen einer Differentialgleichung vom Typus (3) sind konzentrische Kegel, die einer Differentialgleichung vom Typus (4) parallele Zylinder. Die Differentialgleichungen von der Form (2) haben also lauter Develop-

pabelen zu Integralflächen. Nebenbei bemerkt, folgt aus unseren Überlegungen leicht, daß diese Differentialgleichungen auch die einzigen linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit geradlinigen Charakteristiken sind, deren sämtliche Integralflächen abwickelbar sind. Fassen wir unsere Ergebnisse zusammen, so erhalten wir den

Ergebnis (beim Problème (2, 5)).

Satz 4: *„Die Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung sind dann und nur dann gerade Linien, die auf allen nicht-singulären Integralflächen Krümmungslinien bilden, wenn die Differentialgleichung von der Form*

$$\mathfrak{F}(p, q, z - px - qy) = 0 \tag{5}$$

ist, (wobei $\mathfrak{F}$ eine beliebige lineare oder nicht-lineare Funktion ihrer Argumente bedeutet,) oder wenn sie linear ist und ihre Charakteristiken ein System von ∞^2 Minimalgeraden bilden [cf. S. 1].“

Ermittelung derj. Diffgln d. gesuchten Kategorie, welche krummlin. Char. besitz.

Nachdem wir von den in Aufgabe (2, 3) gesuchten Differentialgleichungen alle diejenigen ermittelt haben, deren Charakteristiken gerade Linien sind, wollen wir jetzt auch nach allen partiellen Differentialgleichungen der verlangten Kategorie fragen, die *krummlinige Charakteristiken* besitzen. Daß es *lineare* Differentialgleichungen dieser Art nicht gibt, ist leicht zu beweisen. Denn wir erkennen sofort, was auch für spätere Zwecke wichtig, daß die Charakteristiken einer linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung überhaupt stets geradlinig sind, wenn sie auf allen Integralflächen geodätische Linien bilden. Betrachten wir nämlich eine beliebige Charakteristik einer linearen partiellen Differentialgleichung, so können wir stets eine Integralfläche angeben, welche diese Charakteristik enthält und zudem in einem beliebigen Punkte P der Charakteristik irgendeine der ∞^1 Ebenen E zur Tangentenebene hat, die durch die Charakteristikentangente t des Punktes P hindurchgehen. Ist die Charakteristik geodätische Linie dieser Integralfläche, so ist die gewählte Ebene E die längs t auf der Schmiegungsebene der Charakteristik senkrecht stehende Ebene. Soll die Charakteristik nun auf allen sie enthaltenden Integralflächen geodätisch verlaufen, so muß in jedem ihrer Punkte P jede der ∞^1 die Charakteristik berührenden Ebenen E als Normalebene der zugehörigen Schmiegungsebene aufgefaßt werden können. Die Schmiegungsebene der Charakteristik muß also an jeder Stelle unbestimmt, die Charakteristik sonach eine Gerade sein.

Lineare Diffgln dieser Art.

Nicht-lineare Diffgln dieser Art.

Die partiellen Differentialgleichungen der in unserer Aufgabe gesuchten Art, die krummlinige Charakteristiken haben und die wir jetzt ermitteln wollen, sind also sämtlich *nicht-linear*. Die Zahl der Charakteristiken jeder solchen Differentialgleichung beträgt daher ∞^3. Wir wollen nun

eine beliebige Integralfläche J der allgemeinsten derartigen Differentialgleichung ins Auge fassen. Die ∞^1 die Fläche J erzeugenden Charakteristiken k sind nach dem ersten der zitierten Sätze ebene Kurven. Ihre Ebenen umhüllen eine gewisse Raumkurve R. In einem beliebigen Flächenpunkte P ist die eine Hauptkrümmungstangente mit der Tangente der durch P gehenden Charakteristik k identisch; die andere Hauptkrümmungstangente steht auf der Ebene dieser Charakteristik k senkrecht, da k eine geodätische Kurve der Integralfläche J bildet. Hieraus folgt, daß das vom System der Charakteristiken verschiedene System von Krümmungslinien der Integralfläche J aus Orthogonalkurven der ∞^1 Ebenen der Charakteristiken k besteht, also von ∞^1 Planevolventen der Raumkurve R gebildet wird. Da diese ∞^1 Planevolventen die ∞^1 Ebenen der Charakteristik k nach kongruenten Kurven schneiden, so ergibt sich, daß die auf der Integralfläche J verlaufenden Charakteristiken k sämtlich untereinander kongruent sind. Bedenken wir, daß durch jede der ∞^1 Charakteristiken der betrachteten Integralfläche J unendlich viele andere Integralflächen derselben Differentialgleichung hindurchgehen, und daß auch alle auf diesen Integralflächen gelegenen Charakteristiken mit den Charakteristiken der Integralfläche J kongruent sein müssen, so erkennen wir durch Wiederholung dieser Schlußweise, daß überhaupt alle ∞^3 Charakteristiken der allgemeinsten Differentialgleichung der gesuchten Art untereinander kongruent sind. Es ist klar, daß die beliebige Integralfläche J von einer Charakteristik k beschrieben wird, wenn deren Ebene von der Raumkurve R, oder, was dasselbe von deren Tangentenfläche abrollt ohne zu gleiten. Die Integralflächen der allgemeinsten partiellen Differentialgleichung der verlangten Art sind also sog. «surfaces moulures générales» (cf. Darboux, «Théor. d. Surf.», I. Bd., Art. 85, pag. 103) oder „Allgemeine Gesimsflächen“ (cf. Scheffers, „Anw. d. Diff.- u. Int.-Rechn. auf Geom.“, II. Bd., § 9, pag. 181). Es ist nun höchst beachtenswert, daß sich alle derartigen partiellen Differentialgleichungen durch Differentiations- und Eliminationsprozesse finden lassen. Wie wir alsbald zeigen werden, können zu jeder ebenen Kurve k, wie immer sie auch beschaffen sei, sofort unendlich viele partielle Differentialgleichungen erster Ordnung ermittelt werden, deren Charakteristiken sämtlich mit der vorgegebenen Kurve k kongruent sind und auf allen nicht-singulären Integralflächen zugleich Krümmungslinien und geodätische Linien bilden.

Allgemeine Gesimsfln.

Die folgenden Untersuchungen werden lehren, daß unter den gesuchten Differentialgleichungen diejenigen in mehrfacher Hinsicht eine besondere Rolle spielen, deren Charakteristiken Kreise sind. Mit diesen Differentialgleichungen wollen wir uns zunächst befassen und ihre

Diffgln, deren Char. Kreise sind.

analytische Form bestimmen. Wir überlegen dabei, wie folgt: Die Gleichung

$$(6) \qquad (x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2-r^2=0$$

definiert bei beliebig veränderlichen Größen X, Y, Z und konstantem r den Komplex aller Kugeln vom Radius r im Raume (x, y, z). Setzen wir zwischen den Mittelpunktskoordinaten X, Y, Z eine beliebige Relation

$$(7) \qquad F(X, Y, Z)=0$$

fest, so wird durch die Gleichung (6) nunmehr das System der ∞^2 Kugeln vom Radius r geliefert, deren Mittelpunkte die durch Gleichung (7) dargestellte Fläche erfüllen. Dieses Kugelsystem bildet eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die wir erhalten, indem wir die Gleichung (6) einmal total nach x, ein anderes Mal total nach y differentiieren und aus den sich ergebenden Gleichungen

$$(8) \qquad x-X+(z-Z)p=0$$

$$(9) \qquad y-Y+(z-Z)q=0$$

und aus den Gleichungen (6) und (7) die drei Größen X, Y, Z eliminieren. Es ergibt sich zunächst

$$(8') \qquad x-X=-(z-Z)p$$

$$(9') \qquad y-Y=-(z-Z)q$$

$$(6') \qquad z-Z=\frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

hieraus

$$(10) \qquad \begin{cases} X=x+\dfrac{rp}{\sqrt{p^2+q^2+1}} \\ Y=y+\dfrac{rq}{\sqrt{p^2+q^2+1}} \\ Z=z-\dfrac{r}{\sqrt{p^2+q^2+1}} \end{cases}$$

und durch Substitution in die Gleichung (7) des Mittelpunktsortes die partielle Differentialgleichung:

$$(11) \qquad F\left(x+\frac{rp}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\ y+\frac{rq}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\ z-\frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\right)=0.$$

Diese partielle Differentialgleichung besitzt nun offenbar die gewünschten Eigenschaften. Gehen wir nämlich von einem beliebigen Punkte P der Fläche (7) zu einem infinitesimal benachbarten Flächenpunkte P' über und konstruieren die beiden unendlich benachbarten Kugeln der vollständigen Lösung mit den Mittelpunkten P und P', so

schneiden sich diese nach dem Kreise vom Radius r, dessen Ebene in P auf der Fortschrittsrichtung $\overline{PP'}$ senkrecht steht und dessen Mittelpunkt der Punkt P ist. Dieser Kreis bildet eine Charakteristik der Differentialgleichung (11) und wir erkennen, daß die Gesamtheit der Charakteristiken dieser Differentialgleichung aus den ∞^3 Kreisen vom Radius r besteht, deren Mittelpunkte auf der Fläche (7) liegen und deren Ebenen die Flächennormalen ihrer Mittelpunkte enthalten. Die Charakteristiken bilden als Großkreise der Kugeln der betrachteten vollständigen Lösung tatsächlich Krümmungslinien und geodätische Linien auf diesen und somit auf allen nicht-singulären Integralflächen der partiellen Differentialgleichung (11). Die Konstante r und die durch Gleichung (7) eingeführte Funktion F, welche in der Differentialgleichung (11) wieder auftritt, konnten völlig willkürlich gewählt werden. Es ist also jetzt bewiesen, daß jede partielle Differentialgleichung vom Typus der Differentialgleichung (11), in der r eine beliebige Konstante und F eine beliebige Funktion bedeutet, als Charakteristiken ∞^3 kongruente Kreise hat, die auf allen nicht-singulären Integralflächen zugleich Krümmungslinien und geodätische Linien bilden.

Ist eine partielle Differentialgleichung von dieser Form vorgegeben, so gestaltet sich ihre Integration äußerst einfach. Wir können nämlich sofort ein vollständiges Integral angeben. Ein solches besteht aus den ∞^2 Kugeln, deren Radius die in der vorgelegten Differentialgleichung auftretende Konstante r und deren Mittelpunktsort die Fläche ist, deren Gleichung wir erhalten, indem wir statt dieser Konstanten r den Wert 0 in die gegebene Differentialgleichung einsetzen. Wir sind also bei vorgegebener Differentialgleichung (11) imstande sofort die Gleichungen (6) und (7) anzuschreiben, welche ein vollständiges Integral definieren. Um ein beliebiges allgemeines Integral der vorgelegten Differentialgleichung (11) zu bestimmen, haben wir das Umhüllungsgebilde irgend einer Schar von ∞^1 Kugeln der gefundenen vollständigen Lösung zu ermitteln. Fordern wir eine beliebige zweite Relation

$$G(X, Y, Z) = 0 \tag{12}$$

zwischen den Mittelpunktskoordinaten X, Y, Z, so greifen wir dadurch aus dem System der ∞^2 Kugeln des vollständigen Integrales diejenigen ∞^1 Kugeln heraus, deren Mittelpunkte die durch (7) und (12) definierte beliebige Kurve der Fläche (7) erfüllen. Diese Kurve ist die Leitlinie der Röhrenfläche, welche diese ∞^1 Kugeln umhüllt und eine allgemeine Integralfläche der Differentialgleichung (11) bildet. Die Gleichung dieser allgemeinen Integralfläche erhalten wir, indem wir aus den Gleichungen (7) und (12) etwa Y und Z durch X ausdrücken, die für Y

und Z erhaltenen Funktionen von X in Gleichung (6) einführen und schließlich aus dem Substitutionsresultate und der durch Differentiation nach X daraus hervorgehenden Gleichung die Größe X eliminieren. Natürlich ergibt sich die Gleichung dieser Röhrenfläche auch durch Elimination der fünf Größen $X, Y, Z, \frac{dY}{dX}, \frac{dZ}{dX}$ aus dem Systeme der sechs Gleichungen

$$(13)\quad \begin{cases} (x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2+r^2=0 \\ (x-X)+(y-Y)\frac{dY}{dX}+(z-Z)\frac{dZ}{dX}=0 \\ F(X,Y,Z)=0 \\ G(X,Y,Z)=0 \\ \frac{\partial F}{\partial X}+\frac{\partial F}{\partial Y}\frac{dY}{dX}+\frac{\partial F}{\partial Z}\frac{dZ}{dX}=0 \\ \frac{\partial G}{\partial X}+\frac{\partial G}{\partial Y}\frac{dY}{dX}+\frac{\partial G}{\partial Z}\frac{dZ}{dX}=0. \end{cases}$$

Auch das singuläre Integral einer Differentialgleichung von der Form (11) können wir sofort angeben. Dieses besteht offenbar aus den beiden Flächen, die von den sämtlichen ∞^2 Kugeln der betrachteten vollständigen Lösung umhüllt werden, d. h. aus den im Abstande r konstruierten Parallelflächen zum Mittelpunktsort (7) dieser Kugeln. Die Gleichung des singulären Integrales kann demnach in einfacher Weise aus der Gleichung (7) abgeleitet werden. Wie wir das singuläre Integral aus der Fläche (7) erhalten, indem wir diese der Dilatation um die Strecke r unterwerfen, so ergeben sich alle nicht-singulären Integralflächen aus den Punkten und Kurven dieser Fläche (7) durch dieselbe Dilatation. Sämtliche nicht-singulären Integralflächen sind Röhrenflächen, da auch Kugeln als solche aufgefaßt werden können. Wir wollen unser Ergebnis kurz formulieren:

Satz 5: *„Jede partielle Differentialgleichung von der Form der Differentialgleichung*

$$(11)\quad F\left(x+\frac{rp}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\ y+\frac{rq}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\ z-\frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\right)=0,$$

in der r eine Konstante und F eine beliebige Funktion ihrer Argumente bedeutet, hat die Eigenschaft, daß ihre Charakteristiken zugleich Krümmungslinien und geodätische Linien auf den Integralflächen bilden. Eine vollständige Lösung der Differentialgleichung (11) *besteht aus den ∞^2 Kugeln vom Radius r, deren Mittelpunkte die Fläche*

$$(7)\quad F(X,Y,Z)=0$$

erfüllen.“

Ermittelung d. allgemeinsten Diffgl. d. gesuchten Art mit krummlin. Char.

Auf die Differentialgleichungen von der Form (11) werden wir noch weiter zu sprechen kommen; jetzt aber wollen wir zunächst zur Entwickelung eines Verfahrens übergehen, durch das wir, wie sich zeigen wird, alle partiellen Differentialgleichungen der in der Aufgabe verlangten Art erhalten, deren Carakteristiken [kongruente, ebene] Kurven sind. Es sei eine beliebige Fläche durch die Gleichung

$$\Phi(X, Y, Z) = 0 \tag{14}$$

gegeben. Durch die Flächennormale n eines bestimmten Flächenpunktes $P(X, Y, Z)$ werde eine Ebene gelegt, in dieser Ebene irgend eine beliebige Kurve k konstruiert und die Ebene um n gedreht. Dann beschreibt k eine Rotationsfläche, deren Achse die Normale n ist und deren Meridiane mit der Kurve k kongruent sind. Die Gleichung dieser Rotationsfläche können wir in der Form

$$\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial X}(x-X)+\frac{\partial\Phi}{\partial Y}(y-Y)+\frac{\partial\Phi}{\partial Z}(z-Z)}{\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial X}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial Z}\right)^2}} = \mathfrak{F}[(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2] \tag{15}$$

ansetzen, wobei wir unter X, Y, Z die Koordinaten des Punktes P verstehen. Denken wir uns diese Rotationsfläche in starrer Verbindung mit der Normale n, auf welcher der Punkt P fixiert sei, und führen wir dann die Normale n nacheinander derart in die Lage aller ∞^2 Flächennormalen über, daß der Punkt P stets auf der Fläche bleibt, so nimmt die Rotationsfläche der Reihe nach die Lage aller ∞^2 Rotationsflächen an, die durch die Gleichung (15) definiert werden, wenn wir darin für X, Y, Z alle ∞^2 mit der Gleichung (14) verträglichen Wertetripel setzen. Die durch die Gleichung (14) dargestellte Fläche möge als Basisfläche bezeichnet werden. [Wir könnten natürlich auch jede Parallelfläche zur Fläche (14) als Basisfläche ansprechen.] Die genannten ∞^2 Rotationsflächen bilden eine vollständige Lösung einer gewissen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \tag{16}$$

Um diese Differentialgleichung aufzustellen, haben wir die Gleichung (15) total nach x bzw. nach y zu differentiieren und alsdann die drei Größen X, Y, Z aus den Gleichungen (14), (15) und den entstehenden Gleichungen

$$\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial X}+\frac{\partial\Phi}{\partial Z}p}{\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial X}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial Z}\right)^2}} = 2\,\mathfrak{F}'[(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2][(x-X)+(z-Z)p] \tag{17}$$

und

$$\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial Y}+\frac{\partial \Phi}{\partial Z}q}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial Y}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial Z}\right)^2}} \tag{18}$$
$$= 2\mathcal{F}'[(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2][(y-Y)+(z-Z)q]$$

zu eliminieren*). Die sich durch diese Elimination ergebende Differentialgleichung (16) ist, wie immer die Basisfläche und die Meridiankurve k, analytisch gesprochen, die Funktionen Φ und $\mathcal{F}$ gewählt sein mögen, eine Differentialgleichung der verlangten Art. Denn die Charakteristiken, d. h. die ∞^3 Meridiane der ∞^2 kongruenten Rotationsflächen, sind unter allen Umständen [untereinander kongruent und] gleichzeitig Krümmungslinien und geodätische Linien auf allen nichtsingulären Integralflächen, weil sie als Meridiane auf den ∞^2 Rotationsflächen, also auf den Flächen einer vollständigen Lösung, zugleich Krümmungslinien und geodätische Linien bilden.

Ein beliebiges allgemeines Integral der Differentialgleichung (16), das — wie bewiesen — eine allgemeine Gesimsfläche darstellt, erhalten wir durch Ermittelung des Umhüllungsgebildes einer beliebigen stetigen Schar von ∞^1 Rotationsflächen des betrachteten vollständigen Integrales. Die Schnittpunkte der Achsen solcher ∞^1 Rotationsflächen mit der Basisfläche (14) erzeugen auf dieser eine beliebige Flächenkurve, die sich analytisch durch die Gleichung (14) und eine weitere Gleichung

$$\Psi(X, Y, Z) = 0 \tag{19}$$

darstellen läßt. Zu dieser Kurve sind die ∞^1 von den Charakteristiken verschiedenen Krümmungslinien der entsprechenden allgemeinen Integralfläche parallel, d. h. diese Krümmungslinien haben dieselben Normalebenen wie diese Kurve. Die Gleichung der in Rede stehenden allgemeinen Integralfläche erhalten wir, indem wir etwa die Größen Y, Z in Gleichung (15) mit Hilfe der Gleichungen (14) und (19) durch X ausdrücken und sodann aus der entstandenen Gleichung und der durch Differentiation nach X aus ihr hervorgehenden Gleichung die Größe X eliminieren. Wir können auch analog zu Werke gehen, wie wir dies [auf Seite 31] bei Behandlung der Differentialgleichungen von der Form (11) an zweiter Stelle getan haben.

Unsere Betrachtungen lehren, daß alle partiellen Differentialgleichungen, welche bei willkürlicher Wahl der Funktionen Φ und $\mathcal{F}$ durch das entwickelte Verfahren geliefert werden, Gesimsflächen zu allgemeinen Integralflächen haben, auf denen die Charakteristiken das

*) $\mathcal{F}'$ [· · ·] bedeutet die Ableit. d. Funktion $\mathcal{F}$ nach ihrem Gesamtargumente.

System der kongruenten geodätischen Krümmungslinien bilden. Es ist aber auch klar, daß wir durch dieses Verfahren zu sämtlichen derartigen Differentialgleichungen gelangen, daß wir also, für Φ und $\mathfrak{F}$ alle denkbaren Funktionen setzend, alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung erhalten, deren Charakteristiken Kurven sind, die auf den Integralflächen zugleich Krümmungslinien und geodätische Linien bilden. Wie wir gesehen haben, erfordert die Bestimmung jeder solchen Differentialgleichung nur Differentiationen und Eliminationen. Solange die Gleichungen der Basisfläche und der Rotationsflächen des vollständigen Integrales, von dem wir ausgehen, beide in allgemeiner Form vorliegen, ist die Durchführung dieser analytischen Prozesse natürlich unmöglich. In dem schon behandelten Falle der Differentialgleichungen von der Form (11) war nur die Gleichung der Rotationsflächen bestimmt gewählt, die der Basisfläche aber in allgemeinster Weise vorausgesetzt worden. Hier hatten sich alle erforderlichen Operationen vollständig vollziehen lassen.

Spezielle Klasse v. Diffgln d. gesuchten Art.

Um noch eine weitere interessante Klasse von Differentialgleichungen der betrachteten Art zu ermitteln, wollen wir nunmehr die Basisfläche in einer bestimmten Weise, nämlich als beliebig gelegene Ebene, wählen, die Gleichung der ∞^2 Rotationsflächen dagegen in denkbar allgemeinster Weise annehmen. Auch in diesem Falle lassen sich alle zur Aufstellung der gesuchten Differentialgleichung nötigen Operationen vollständig durchführen. Hat die Basisebene die Gleichung

$$aX + bY + cZ + d = 0, \tag{20}$$

dann stellt die Gleichung

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2 = f(ax + by + cz + d), \tag{21}$$

wofern wir unter x, y, z laufende Koordinaten und unter X, Y, Z die Koordinaten der Punkte der Basisebene verstehen, ∞^2 kongruente und in bezug auf die Basisebene gleich orientierte Rotationsflächen dar. Um die partielle Differentialgleichung erster Ordnung herzuleiten, welche diese ∞^2 Rotationsflächen als vollständige Lösung besitzt, bilden wir die Gleichungen*)

$$2(x - X) + 2(z - Z)p = (a + cp) f'(ax + by + cz + d), \tag{22}$$

$$2(y - Y) + 2(z - Z)q = (b + cq) f'(ax + by + cz + d), \tag{23}$$

die aus der Gleichung (21) durch totale Differentiation nach x bzw. nach y hervorgehen. Die in Rede stehende partielle Differentialgleichung erhalten wir, wenn wir die drei Größen X, Y, Z aus den vier Glei-

*) $f'(ax + by + cz + d) = \dfrac{df(ax + by + cz + d)}{d(ax + by + cz + d)}$.

chungen (20), (21), (22), (23) eliminieren. Um diese Elimination in übersichtlicher Weise vollziehen zu können, schreiben wir die Gleichung (20) in der Form

$$(20') \quad a(x-X)+b(y-Y)+c(z-Z)=ax+by+cz+d.$$

Durch geeignete Verbindung der Gleichungen (22), (23), (20) ergibt sich alsdann unmittelbar die Gleichung

$$(24) \quad \begin{aligned} &2(ap+bq-c)(c-Z)= \\ &[a(a+cp)+b(b+cq)]f'(ax+by+cz+d)-2(ax+by+cz+d). \end{aligned}$$

Setzen wir jetzt zur Abkürzung

$$(25) \quad ax+by+cz+d=\zeta,$$

so folgt aus Gleichung (24) sofort

$$(24') \quad z-Z=\frac{[c(ap+bq-c)+(a^2+b^2+c^2)]f'(\zeta)-2\zeta}{2(ap+bq-c)},$$

sodaß wir mit Hilfe der Gleichungen (22), (23) und (24') ohne weiteres erhalten:

$$(26) \quad \begin{cases} x-X=\frac{a}{2}f'(\zeta)-\frac{(a^2+b^2+c^2)f'(\zeta)-2\zeta}{2(ap+bq-c)}p, \\ y-Y=\frac{b}{2}f'(\zeta)-\frac{(a^2+b^2+c^2)f'(\zeta)-2\zeta}{2(ap+bq-c)}q, \\ z-Z=\frac{c}{2}f'(\zeta)+\frac{(a^2+b^2+c^2)f'(\zeta)-2\zeta}{2(ap+bq-c)}. \end{cases}$$

Die gesuchte partielle Differentialgleichung ergibt sich durch Substitution der für $x-X$, $y-Y$, $z-Z$ gefundenen Ausdrücke in die Gleichung (21) daher in der Gestalt

$$(27) \quad \begin{aligned} &\frac{a^2+b^2+c^2}{4}f'(\zeta)-\left[\frac{(a^2+b^2+c^2)f'(\zeta)-2\zeta}{2}\right]f'(\zeta) \\ &\qquad +\left[\frac{(a^2+b^2+c^2)f'(\zeta)-2\zeta}{2}\right]^2\frac{p^2+q^2+1}{(ap+bq-c)^2}=f(\zeta) \end{aligned}$$

oder

$$(27') \quad \frac{p^2+q^2+1}{(ap+bq-c)^2}=\frac{4f(\zeta)+(a^2+b^2+c^2)f'^2(\zeta)-4\zeta f'(\zeta)}{[(a^2+b^2+c^2)f'(\zeta)-2\zeta]^2}.$$

Wir wollen nun eine beliebige allgemeine Integralfläche der Differentialgleichung (27') betrachten. Eine solche erhalten wir, wenn wir in der Basisebene (20) eine beliebige Kurve c konstruieren und das Umhüllungsgebilde derjenigen ∞^1 Rotationsflächen (21) ermitteln, deren Achsen die Basisebene längs c schneiden. Die entstehende allgemeine Integralfläche stellt eine Monge'sche Gesimsfläche im engeren Sinne (surface moulure) dar (cf. Darboux «Théor. d. Surf.» I. Bd. Art. 86, pag. 104). Denn sie wird offenbar von einer ihrer Charakteristiken erzeugt, wenn deren Ebene von einem gewissen Zylinder abrollt ohne

zu gleiten. Die Mantellinien dieses Zylinders stehen auf der Basisebene senkrecht und schneiden diese nach der Evolute e der Kurve c.

Die vorstehenden Überlegungen sind von der Lage der Basisebene zum Koordinatensystem und von der Natur der Meridiankurve der genannten Rotationsflächen völlig unabhängig. Daher hat jede Differentialgleichung von der Form

$$(27'') \qquad \frac{p^2+q^2+1}{(ap+bq-c)^2} = \frac{4f(ax+by+cz+d)+(a^2+b^2+c^2)f'^2(ax+by+cz+d)-4(ax+by+cz+d)f'(ax+by+cz+d)}{[(a^2+b^2+c^2)f'(ax+by+cz+d)-2(ax+by+cz+d)]^2},$$

in der a, b, c, d irgendwelche Konstanten und f eine beliebige Funktion bezeichnen, die Eigenschaften, daß ihre Charakteristiken zugleich Krümmungslinien und geodätische Linien auf den Intagralflächen bilden und daß ihre allgemeinen Integralflächen Monge'sche Gesimsflächen (im engeren Sinne) sind. Andererseits kann, wie leicht ersichtlich, jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welche diese Eigenschaften besitzt, in der Form (27'') geschrieben werden.

Ist eine Differentialgleichung von dieser Gestalt vorgelegt, so können wir die Gleichungen (20) und (21), die ein aus kongruenten Rotationsflächen bestehendes vollständiges Integral bestimmen, unmittelbar aufstellen.

Jede Differentialgleichung vom Typus (27'') kann in der Form

$$(28) \qquad F\left[ax+by+cz+d,\ \frac{p^2+q^2+1}{(ap+bq-c)^2}\right]=0$$

dargestellt werden, wenn F eine beliebige Funktion ihrer Argumente bedeutet. Da wir uns aber auch umgekehrt jede Differentialgleichung vom Typus (28) [auf unendlich viele Weisen] in der Form (27'') geschrieben denken können*), so zeigt sich, daß die Gesamtheit der durch die Diffe-

*) Jede Differentialgleichung vom Typus (28) können wir uns zunächst auf die Form

$$(28') \qquad \frac{p^2+q^2+1}{(ap+bq-c)^2} = \varphi(ax+by+cz+d)$$

gebracht denken. Um die Differentialgleichung (28') in der Gestalt (27'') schreiben zu können, gilt es die Funktion $f(ax+by+cz+d)$ aus der Differentialgleichung 1. O. 2. Gr.

$$(29) \qquad \frac{4f(ax+by+cz+d)+(a^2+b^2+c^2)f'^2(ax+by+cz+d)-4(ax+by+cz+d)f'(ax+by+cz+d)}{[(a^2+b^2+c^2)f'(ax+by+cz+d)-2(ax+by+cz+d)]^2} = \varphi(ax+by+cz+d)$$

zu ermitteln. Es gibt unendlich viele Funktionen $f(ax+by+cz+d)$, welche diese Differentialgleichung identisch erfüllen. Jede solche Funktion $f(ax+by+cz+d)$ liefert eine Differentialgleichung (27'') und damit sofort ein aus ∞^2 kongruenten

rentialgleichung (28) bestimmten Differentialgleichungen mit der durch die Differentialgleichung (27″) definierten identisch ist. Aus unseren Entwickelungen folgt der

Satz 6: *„Jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung von der Form*

$$F\left[ax + by + cz + d,\ \frac{p^2+q^2+1}{(ap+bq-c)^2}\right] = 0, \tag{28}$$

worin F eine beliebige Funktion ihrer Argumente und a, b, c, d irgendwelche Konstanten bezeichnen, ist eine Differentialgleichung, deren Charakteristiken zugleich Krümmungslinien und geodätische Linien auf den Integralflächen bilden und deren allgemeine Integralflächen Monge'sche Gesimsflächen (im engeren Sinne) sind. Umgekehrt ist jede Differentialgleichung, welche diese Eigenschaften besitzt, in der Form (28) *enthalten.“*

Nach unseren Überlegungen [cf. Seite 36: Anmerkung] gestaltet sich die Integration einer Differentialgleichung vom Typus (28) äußerst einfach, falls die besprochenen Rechnungen praktisch durchführbar sind.

Analyt. Form d. gesuchten Diffgln.

Wir wollen nun dazu übergehen, die *analytische Form* aller partiellen Differentialgleichungen der in unserer Aufgabe gesuchten Kategorie zu untersuchen, deren Charakteristiken krummlinig sind.

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

sei die allgemeinste derartige Differentialgleichung. Liegt eine beliebige partielle Differentialgleichung erster Ordnung vor, deren Charakteristiken auf den Integralflächen Krümmungslinien sind und konstruieren wir die Normalen der Flächenelemente längs ihrer ∞^3 charakteristischen Streifen, so erhalten wir [im allgemeinen]*) ∞^3 Developpabelen. Die ∞^3 Gratlinien dieser ∞^3 abwickelbaren Flächen sind die Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung und bilden geodätische Linien auf deren Integralflächen, den Zentraflächen der einen Art**) der Integralflächen der Ausgangsgleichung (cf. § 3 des 14. Kap., pag. 666 u. 667). Hieraus folgt, daß die ∞^3 Evoluten l der ∞^3 Charakteristiken k unserer Differentialgleichung $F = 0$ die Charakteristiken einer partiellen

---

Rotationsflächen bestehendes vollständiges Integral der Differentialgleichung (28). Unsere Betrachtungen auf Seite 28 u. 32 lehren, daß die Rotationsflächen all dieser vollständigen Integrale dieselbe Meridiankurve besitzen. Dreht man eine Meridiankurve einer beliebigen Rotationsfläche irgendeines solchen vollständigen Integrales um eine zur Achse der Rotationsfläche parallele, in der Ebene der Meridiankurve gelegene Gerade, so entsteht eine neue Rotationsfläche, welche dieselbe Meridiankurve besitzt und einem anderen dieser vollständigen Integrale angehört [cf. Seite 34 u. 35].

*) Cf. § 5 Seite 45.

**) Nämlich der Art, die zu dem aus Charakteristiken bestehenden System von Krümmungslinien der Integralflächen gehört.

Differentialgleichung $G(x, y, z, p, q) = 0$ sind, auf deren Integralflächen sie geodätische Linien bilden. Da die Kurven l zudem eben sind, bilden sie nach dem zweiten der zitierten Sätze auch Krümmungslinien auf den Integralflächen von $G = 0$. Die Differentialgleichung $G = 0$ ist demnach von derselben Art wie die Differentialgleichung $F = 0$, ein Ergebnis, das wir auf Grund früherer Untersuchungen auch leicht direkt hätten einsehen können. Wie nun die Differentialgleichung $G = 0$ die Zentraflächen der einen Art der Integralflächen von $F = 0$ zu Integralflächen hat, so können wir auch die Integralflächen der Differentialgleichung $F = 0$ als Zentraflächen derselben Art einer partiellen Differentialgleichung $E(x, y, z, p, q) = 0$ auffassen, welche zur nämlichen Kategorie gehört wie die Differentialgleichungen $F = 0$ und $G = 0$. Hieraus folgt aber sofort, daß die Differentialgleichung $F = 0$ von der Form

$$(30)\quad (pH_x + qH_y - H_z)^2 - (H_x^2 + H_y^2 + H_z^2 - 1)(p^2 + q^2 + 1) = 0$$

ist, wobei H eine beliebige Funktion von x, y, z bedeutet. Denn diese Form umfaßt alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Integralflächen die Zentraflächen der einen Art*) der Integralflächen einer Differentialgleichung sind, deren Charakteristiken Krümmungslinien auf den Integralflächen bilden (cf. § 3 des 14. Kap., pag. 671: Theor. 27 und folgender Absatz, sowie pag. 667: Satz 8). Alle in der Form (30) enthaltenen Differentialgleichungen haben die Eigenschaft, daß ihre Charakteristiken geodätische Linien auf den Integralflächen sind (cf. pag. 671). Da die Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$ aber dann und nur dann Krümmungslinien auf ihren Integralflächen bilden, wenn die Funktion F so beschaffen ist, daß die Gleichung

$$(31)\quad [F_p + p(F_z p + F_q q)][F_y + F_z q] = [F_q + q(F_z p + F_q q)][F_x + F_z p]$$

infolge von $F = 0$ oder identisch besteht (cf. § 2 des 14. Kap., pag. 657), so ergibt sich aus unseren Betrachtungen der

Satz 7: *„Alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken krummlinig sind und auf den Integralflächen zugleich Krümmungslinien und geodätische Linien bilden, sind von der Form der Differentialgleichung*

$$(30)\quad F(x, y, z, p, q) \equiv (pH_x + qH_y - H_z)^2 - (H_x^2 + H_y^2 + H_z^2 - 1)(p^2 + q^2 + 1) = 0,$$

in der H eine Funktion von x, y, z bedeutet; und zwar haben von den

*) Nämlich der Art, die zu dem aus Charakteristiken bestehenden System von Krümmungslinien der Integralflächen gehört.

in dieser Form enthaltenen Differentialgleichungen diejenigen und nur diejenigen die genannten Eigenschaften, bei denen die Bedingung (31) *erfüllt ist.*"

Nach unseren Überlegungen [auf Seite 28] ist klar, daß keine dieser Differentialgleichungen die infinitesimale Dilatation gestattet, daß aber jede von ihnen durch eine beliebige Dilatation in eine Differentialgleichung derselben Art übergeführt wird.

Zum Schlusse wollen wir noch einen wesentlichen Unterschied hervorheben, der zwischen den Differentialgleichungen von der Form (11) und den übrigen der in Rede stehenden Differentialgleichungen besteht. Sämtliche Differentialgleichungen der betrachteten Art können wir aus gewissen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken Haupttangentenkurven auf den Integralflächen sind, dadurch erzeugen, daß wir auf diese Differentialgleichungen die in Lies „Geom. d. Ber.transf." im 10. Kap. behandelte Transformation ausüben, bei welcher den Haupttangentenkurven einer Fläche die Krümmungslinien der transformierten Fläche [und umgekehrt] entsprechen (cf. § 4 des 10. Kap., pag. 466 und § 2 des 14. Kap., pag. 649). Die Differentialgleichungen vom Typus (11) besitzen eine vollständige Lösung, die aus ∞^2 Kugeln besteht, während dies bei den übrigen Differentialgleichungen der behandelten Art nicht der Fall ist. Daraus schließen wir, daß jede partielle Differentialgleichung von der Form (11) bei der genannten Berührungstransformation aus einer linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung hervorgeht, deren Charakteristiken ein Strahlensystem bilden*), jede der übrigen dagegen aus einer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die einem nichtlinearen Linienkomplexe zugehört (cf. § 2 des 14. Kap., pag. 656).

§ 5. Lösung des Problemes (2, 4).

„Gesucht sind alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung $F(x, y, z, p, q) = 0$, *deren Charakteristiken auf den Integralflächen Krümmungslinien bilden und deren Integralflächen zu Normalen lauter Geraden eines Linienkomplexes haben."*

Ermittelung d. linearen Diffgln d. gesuchten Art.

Aus Gründen, die an späterer Stelle zutage treten werden, erscheint es zweckmäßig zunächst alle *linearen* partiellen Differentialgleichungen

*) Beispiel: Bei der inversen Berührungstransformation (cf. § 4 des 10. Kap., pag. 468) geht die Differentialgleichung

$$z^2(p^2+q^2+1)-1=0$$

über in

$$[xp+(y+1)q-x][xp+(y-1)q+x]=0.$$

der in unserer Aufgabe verlangten Kategorie zu ermitteln. Ist eine partielle Differentialgleichung, deren Integralflächen lauter Geraden eines Linienkomplexes zu Normalen haben, linear, dann ist auch der Komplex der Normalen linear [cf. Seite 2]. Es sei nun $\mathfrak{F} = 0$ die allgemeinste lineare partielle Differentialgleichung der in unserer Aufgabe gesuchten Art. Das Nullsystem, dem die Normalen ihrer Integralflächen angehören, sei mit N bezeichnet. Wir fassen jetzt irgend einen Punkt P einer beliebigen Integralfläche J dieser Differentialgleichung ins Auge und konstruieren im Punkte P die Nullebene E, welche ihm durch das Nullsystem N zugewiesen wird, sowie die Tangente t_1 der durch P gehenden Charakteristik. Die Tangente t_1 ist die eine Hauptkrümmungstangente der Integralfläche J im Punkte P. Die Nullebene E schneidet die in P an J gelegte Tangentenebene nach der Tangente t_2 der Kurve des Nullsystemes, die durch P geht und auf J verläuft. Da nun t_1 auf der Nullebene E senkrecht steht [cf. Seite 2], bilden t_1 und t_2 einen rechten Winkel miteinander. t_2 ist demnach die andere Hauptkrümmungstangente der Integralfläche J im Punkte P. Das eine System von Krümmungslinien der Integralfläche J, das wir als das erste bezeichnen wollen, wird von den ∞^1 die Fläche erzeugenden Charakteristiken gebildet. Aus der vorstehenden Betrachtung folgt nun, daß das zweite System von Krümmungslinien aus den ∞^1 auf der Fläche J verlaufenden Kurven des Nullsystemes N besteht. Diese Kurven sind aber geodätische Linien der Integralfläche J. Denn in jedem Punkte P einer solchen Kurve steht deren Schmiegungsebene, die ja mit der zu diesem Punkt gehörigen Nullebene E identisch ist (cf. § 4 des 6. Kap., pag. 231), auf der Tangentenebene der Integralfläche J senkrecht. Da jede geodätische Krümmungslinie einer Fläche eine ebene Kurve ist [cf. Seite 25], so ergibt sich mithin, daß das zweite System von Krümmungslinien der Integralfläche J von ebenen Kurven gebildet wird. Die Krümmungslinien des ersten Systemes, d. h. die ∞^1 auf der Fläche verlaufenden Charakteristiken sind Orthogonaltrajektorien der ∞^1 Ebenen der Krümmungslinien des zweiten Systemes.

[Dieses Ergebnis scheint inhaltslos zu werden, wenn das zweite System von Krümmungslinien insbesondere aus lauter Geraden besteht, wenn die Integralfläche J also eine dem Nullsystem N angehörige Regelfläche ist. Da die geradlinigen Erzeugenden einer Regelfläche aber nur dann Krümmungslinien auf dieser bilden, wenn sie Minimalgeraden sind, oder wenn die Regelfläche abwickelbar ist, die erste Möglichkeit hier jedoch offenbar nicht vorliegen kann, so ist die Integralfläche J alsdann eine Developpabele; längs jeder geradlinigen Erzeugenden steht also eine und dieselbe Ebene auf der Integralfläche

senkrecht. Um unserer Betrachtung auch in diesem Falle Gültigkeit zu verschaffen brauchen wir nur die ∞^1 Ebenen, welche die Integralfläche längs der ∞^1 auf ihr gelegenen Geraden des Nullsystemes N senkrecht schneiden, als die Ebenen der Krümmungslinien des zweiten Systemes anzusehen. Diese Bemerkung wird erst später ins rechte Licht treten.]

Die Charakteristiken einer linearen partiellen Differentialgleichung bilden (nach Satz 7 in § 2 des 14. Kap., pag. 665) nur dann Krümmungslinien auf den Integralflächen, wenn sie entweder ∞^2 Minimalgeraden oder die ∞^2 Orthogonalkurven einer Schar von ∞^1 Kugeln sind. Da die erste Möglichkeit hier ausgeschlossen ist [cf. Seite 55], so führt dieser Satz unter Berücksichtigung unseres Ergebnisses sofort zu der Erkenntnis, daß die Charakteristiken einer linearen partiellen Differentialgleichung der gesuchten Art aus den ∞^2 Orthogonaltrajektorien einer Schar von ∞^1 Ebenen bestehen. Jede dieser Ebenen wird in jedem ihrer Punkte von einer Charakteristik senkrecht durchsetzt, enthält demnach, als Nullebene des Normalenkomplexes N aufgefaßt, ∞^2 Nullpunkte und ∞^2 Nullgeraden. In einer Ebene können aber nur dann ∞^2 Nullgeraden eines Nullsystemes liegen, wenn dieses ein spezielles ist (cf. § 3 des 6. Kap., pag. 218). Damit haben wir erkannt, daß es partielle Differentialgleichungen der verlangten Kategorie, deren Integralflächen zu Normalen lauter Geraden eines nicht-speziellen Nullsystemes haben, nicht gibt.

Wohl aber hat jede partielle Differentialgleichung, deren Integralflächen lauter Geraden eines beliebigen speziellen Nullsystemes zu Normalen haben, auch die Eigenschaft, daß ihre Charakteristiken auf den Integralflächen Krümmungslinien sind, ist also eine Differentialgleichung der verlangten Art. Das wollen wir nunmehr zeigen. Liegt ein spezielles Nullsystem vor, so enthalten die ∞^1 Ebenen, deren Orthogonalkurven die Charakteristiken sind, sämtlich eine bestimmte Gerade g, die Achse des speziellen Nullsystemes, und es gilt zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem diese Gerade g *im Endlichen* oder im Unendlichen gelegen ist.

D. Achse d. spez. Nullsyst. liegt im Endlich.

Wir betrachten zunächst den ersten Fall. Hier sind die Charakteristiken (als Orthogonaltrajektorien der Ebenen des Büschels mit dem Träger g) offenbar die ∞^2 Kreise, deren Mittelpunkte auf g liegen und und deren Ebenen auf g senkrecht stehen.

Eine beliebige allgemeine Integralfläche ist daher eine Rotationsfläche mit der Achse g. Die ∞^1 auf der Fläche verlaufenden Charakteristiken bilden als Parallelkreise tatsächlich ein System von Krümmungslinien. Das zweite System von Krümmungslinien besteht

aus den ∞^1 Meridianen der Rotationsfläche, die, wie erforderlich, geodätisch verlaufen und Kurven des speziellen Nullsystemes sind. Um zur analytischen Form der allgemeinsten hierher gehörigen partiellen Differentialgleichung zu gelangen haben wir offenbar nur zum Ausdrucke zu bringen, daß die Normale

$$(1) \qquad \begin{cases} X = x + \sigma p \\ Y = y + \sigma q \text{ *)} \\ Z = z - \sigma \end{cases}$$

jedes beliebigen Flächenelementes (x, y, z, p, q) der durch die partielle Differentialgleichung zu definierenden Schar eine bestimmte Gerade g schneidet. Setzen wir die Gleichungen dieser Geraden in der Form

$$(2) \qquad \begin{cases} X = a + \tau\alpha \\ Y = b + \tau\gamma \text{ *)} \\ Z = c + \tau\beta \end{cases}$$

an, so ergibt sich daher die gesuchte partielle Differentialgleichung durch Elimination von σ und τ aus dem Gleichungensysteme

$$(3) \qquad \begin{cases} x + \sigma \quad p \quad = a + \tau\alpha \\ y + \sigma \quad q \quad = b + \tau\beta \\ z + \sigma(-1) = c + \tau\gamma \end{cases}$$

in der Gestalt

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} p & x-a & \alpha \\ q & y-b & \beta \\ -1 & z-c & \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Das spezielle Nullsystem, dem die Normalen ihrer Integralflächen angehören, hat folglich die Gleichung

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} dx & x-a & \alpha \\ dy & y-b & \beta \\ dz & z-c & \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Hiermit sind wir zur allgemeinsten Pfaff'schen Gleichung gelangt, die ein spezielles Nullsystem darstellt. In extenso lautet sie

$$(5') \qquad \begin{aligned} &\alpha(y\,dz - z\,dy) + \beta(z\,dx - x\,dz) + \gamma(x\,dy - y\,dx) \\ &\quad + (\gamma b - \beta c)dx + (\alpha c - \gamma a)dy + (\beta a - \alpha b)dz = 0 \end{aligned}$$

oder in anderer Schreibweise

$$(5'') \qquad \alpha(y\,dz - z\,dy) + \beta(z\,dx - x\,dz) + \gamma(x\,dy - y\,dx) + \delta\,dx + \varepsilon\,dy + \zeta\,dz = 0,$$

wobei

*) X, Y, Z sind laufende Koordinaten.

$$(6)\qquad \begin{cases} \gamma b - \beta c = \delta \\ \alpha c - \gamma a = \varepsilon \\ \beta a - \alpha b = \zeta \end{cases}$$

gesetzt sind, sodaß also zwischen den Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ die identische Relation

$$(7)\qquad \alpha\delta + \beta\varepsilon + \gamma\zeta \equiv 0$$

besteht. Die allgemeinste partielle Differentialgleichung der in Rede stehenden Art kann dementsprechend in der Form

$$(8)\qquad (\beta z - \gamma y + \delta)\, p + (\gamma x - \alpha z + \varepsilon)\, q - (\alpha y - \beta x + \zeta) = 0$$

geschrieben werden, worin die Konstanten an die Relation (7) gebunden sind. Ist eine partielle Differentialgleichung von diesem Typus vorgelegt, so können die Richtungsgrößen $\alpha : \beta : \gamma$ der Achse des Nullsystemes, dem die Normalen der Integralflächen angehören, sofort abgelesen werden. Stellen wir ferner die Gleichungen (6) auf, die sich vermöge der Relation (7) auf nur zwei unabhängige reduzieren, und berechnen daraus irgend ein Lösungensystem a, b, c, so sind wir imstande die Gleichungen (2) der eindeutig bestimmten Achse dieses speziellen Nullsystemes sofort anzuschreiben. Eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung (8) besteht aus den ∞^2 Kugeln, deren Mittelpunkte auf der Geraden (2) liegen und die durch die Gleichung

$$(9)\qquad [x - (a + \tau\alpha)]^2 + [y - (b + \tau\beta)]^2 + [z - (c + \tau\gamma)]^2 - \varrho^2 = 0$$

dargestellt werden, worin τ und ϱ als variabele Parameter anzusehen sind. Dies ist geometrisch klar und geht analytisch aus der Tatsache hervor, daß wir die partielle Differentialgleichung (8) auch dadurch herleiten können, daß wir die Größe τ aus den beiden Gleichungen

$$(10)\qquad \begin{cases} [x - (a + \tau\alpha)] + [z - (c + \tau\gamma)]\, p = 0 \\ [y - (b + \tau\beta)] + [z - (c + \tau\gamma)]\, q = 0 \end{cases}$$

oder

$$(10')\qquad \begin{cases} x - a + (z - c)p - \tau(\alpha + \gamma p) = 0 \\ y - b + (z - c)q - \tau(\beta + \gamma q) = 0 \end{cases}$$

eliminieren, die wir durch totale Differentiation der Gleichung (9) nach x bzw. nach y erhalten und die von ϱ frei sind. Es ergibt sich zunächst die Gleichung

$$(11)\qquad [x - a + (z - c)p](\beta + \gamma q) - [y - b + (z - c)q](\alpha + \gamma p) = 0$$

oder

$$(11')\qquad \begin{aligned} &(\beta z - \gamma y + \gamma b - \beta c)p + (\gamma x - \alpha z + \alpha c - \gamma a)q \\ &\qquad - (\alpha y - \beta x + \beta a - \alpha b) = 0 \end{aligned}$$

und hieraus unter Berücksichtigung der Gleichungen (6) die partielle Differentialgleichung (8).

Eine beliebige allgemeine Integralfläche dieser Differentialgleichung, die eine Rotationsfläche mit der Achse (2) darstellt, erhalten wir, indem wir zwischen den variabelen Parametern τ, ϱ irgend eine Beziehung

$$\varrho = f(\tau) \tag{12}$$

festsetzen, was auf die Wahl einer bestimmten Meridiankurve hinauskommt, und alsdann aus der sich aus (9) ergebenden Gleichung

$$[x-(a+\tau\alpha)]^2+[y-(b+\tau\beta)]^2+[z-(c+\tau\gamma)]^2-f^2(\tau)=0, \tag{9'}$$

sowie aus der durch Derivation nach τ aus (9') hervorgehenden Gleichung

$$\alpha[x-(a+\tau\alpha)]+\beta[y-(b+\tau\beta)]+\gamma[z-(c+\tau\gamma)]+f(\tau)f'(\tau)=0 \tag{13}$$

die Größe τ eliminieren.

D. Achse d. spez. Nullsyst. liegt im Unendl.

Wir schreiten nunmehr zur Behandlung des zweiten Falles, in welchem die Achse des vorgelegten speziellen Nullsystemes, dem die Normalen der Integralflächen der gesuchten Differentialgleichung angehören, *in der unendlich fernen Ebene* liegt. In diesem Spezialfalle des behandelten Falles haben die ∞^1 Ebenen, deren Orthogonalkurven die Charakteristiken sind, alle dieselbe Stellung. Die Charakteristiken arten hier demnach in zueinander parallele Geraden aus und bilden tatsächlich Krümmungslinien auf den sie enthaltenden Integralflächen, da diese folglich Zylinder sind. Die allgemeinste Pfaff'sche Gleichung eines speziellen Nullsystemes mit unendlich ferner Achse lautet

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0. \tag{15}$$

Die partielle Differentialgleichung

$$ap + bq - c = 0 \tag{16}$$

ist daher die allgemeinste partielle Differentialgleichung, deren Integralflächen zu Normalen lauter Geraden eines speziellen Nullsystemes mit unendlich ferner Achse haben. Ihre Charakteristiken sind, wie bewiesen, Krümmungslinien auf den Integralflächen.

Die sämtlichen im ersten und zweiten Falle besprochenen Differentialgleichungen werden uns bei Behandlung der Aufgabe (4, 6) wieder begegnen. Aus unseren Entwicklungen folgt der

Satz 8: *„Die einzigen linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken Krümmungslinien auf den Integralflächen bilden und deren Integralflächen zu Normalen lauter Geraden eines Linienkomplexes haben, sind diejenigen partiellen Differentialgleichungen vom Typus*

$$(\beta z - \gamma y + \delta)\,p + (\gamma x - \alpha z + \varepsilon)\,q - (\alpha y - \beta x + \zeta) = 0, \tag{8}$$

zwischen deren Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ *die Identität*

$$\alpha\delta + \beta\varepsilon + \gamma\zeta \equiv 0 \tag{7}$$

besteht. Es sind dies alle partiellen Differentialgleichungen, deren Integralflächen lauter Geraden eines speziellen Nullsystemes zu Normalen haben. Die Charakteristiken einer derartigen partiellen Differentialgleichung sind die ∞^2 *Kreise, deren Mitten auf der Achse des speziellen Nullsystemes der Normalen liegen und deren Ebenen auf dieser senkrecht stehen. Die Integralflächen sind die Rotationsflächen mit dieser Geraden als Rotationsachse. Die Pfaff'sche Gleichung des in Rede stehenden speziellen Nullsystemes geht aus der partiellen Differentialgleichung durch die Substitution*

$$p = -\frac{dx}{dz}, \quad q = -\frac{dy}{dz} \tag{17}$$

hervor. In dem besonderen Falle, wo $\alpha = \beta = \gamma = 0$ *ist, liegt die Achse des speziellen Nullsystemes im Unendlichen, die Charakteristiken arten in parallele Geraden und die Integralflächen in parallele Zylinder aus.“*

Ermittelung d. nicht-lin. Diffgln d. gesuchten Art.

Wir wenden uns jetzt dem zweiten Teile der Aufgabe zu, fragen also nach allen *nicht-linearen* partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, welche die beiden verlangten Eigenschaften besitzen. Der Linienkomplex, dem die Normalen der Integralflächen einer derartigen Differentialgleichung angehören, ist ein nicht-linearer [cf. Seite 2].

Es sei nun eine beliebige Integralfläche J einer solchen partiellen Differentialgleichung gegeben. Konstruieren wir die ∞^1 Flächennormalen längs einer auf der Fläche gelegenen Charakteristik, so erzeugen diese eine abwickelbare Fläche, da die Charakteristik eine Krümmungslinie der Integralfläche bildet. Wir sehen nun ohne große Mühe ein, daß diese Developpabele eine *eigentliche Rückkehrkante* nicht besitzen kann. Hätte sie nämlich eine solche, dann würde diese auf dem einen Mantel F der Zentrafläche der betrachteten Integralfläche liegen und auf diesem geodätisch verlaufen. Nach Satz 8 in § 3 des 14. Kap. (Lie, „Geom. d. Ber.tr.“, pag. 667) wäre sie aber auch Charakteristik einer gewissen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, welche diesen Zentraflächenmantel F zur Integralfläche hat. Weiterhin wäre sie, da die Normalen der Integralfläche J einem nicht-linearen Komplexe angehören sollen, auch Komplexkurve dieses Linienkomplexes. Nun bilden die Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung aber stets Haupttangentenkurven auf den Integralflächen, wenn sie Komplexkurven eines nicht-linearen Linienkomplexes sind. (cf. Satz 26 in § 5 des 7. Kap., pag. 308). Die Rückkehrkurve unserer Developpabelen wäre sonach gleichzeitig geodätische Linie und Haupttangentenkurve

auf der Fläche F, also, da jede geodätische Haupttangentenkurve einer Fläche geradlinig ist, eine gerade Linie, was unmöglich ist.

Aus dieser Überlegung folgt, daß die von den Normalen der Flächenelemente längs der charakteristischen Streifen einer partiellen Differentialgleichung der gesuchten Art erzeugten Developpabelen keine abwickelbaren Flächen mit eigentlicher Gratlinie, sondern allenfalls nur Kegel, Zylinder und Ebenen sein können. Wir wollen der Reihe nach jede dieser Möglichkeiten untersuchen.

Erzeugen die Normalen der Elemente längs der charakteristischen Streifen *Kegel*, dann arten die Zentraflächen der einen Art der Integralflächen in Kurven (oder Punkte) aus. Die Integralflächen sind in diesem Falle mithin Kanalflächen (oder Kugeln). Da auch Kugeln als Kanalflächen angesehen werden können, liegt hier also die Frage nach allen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung vor, deren Integralflächen Kanalflächen sind und zu Normalen lauter Geraden eines nicht-linearen Komplexes haben. Zu allen derartigen partiellen Differentialgleichungen gelangen wir, wie wir unten beweisen werden, durch das folgende Verfahren:

Wir definieren uns durch die Gleichungen

$$(18) \qquad \begin{cases} X = \varphi(\tau) \\ Y = \psi(\tau) \\ Z = \chi(\tau) \end{cases}$$

irgendeine Kurve (im eigentlichen Sinne) k. (Die Funktionen φ, ψ, χ unterliegen dabei nur der einen Bedingung, daß sie in τ oder einer und derselben Funktion von τ nicht sämtlich linear sein dürfen.) Dann stellt die Gleichung

$$(19) \qquad [x - \varphi(\tau)]^2 + [y - \psi(\tau)]^2 + [z - \chi(\tau)]^2 - \varrho^2 = 0$$

bei variabelen Parametern τ und ϱ die ∞^2 Kugeln dar, deren Mittelpunkte auf k liegen. Die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$(20) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

welche dieses Kegelsystem als vollständige Lösung besitzt, erhalten wir, wenn wir die Gleichung (19) einmal total nach x, ein anderesmal total nach y differentiieren und aus den entstehenden Gleichungen

$$(21) \qquad \begin{cases} [x - \varphi(\tau)] + [z - \chi(\tau)]\, p = 0 \\ [y - \psi(\tau)] + [z - \chi(\tau)]\, q = 0 \end{cases}$$

den allein noch auftretenden Parameter τ eliminieren. Die Gleichungen (21) geben der Tatsache Ausdruck, daß die Normale

$$(21) \qquad \frac{x - X}{p} = \frac{y - Y}{q} = \frac{z - Z}{-1}$$

eines beliebigen Flächenelementes (x, y, z, p, q) der gesuchten partiellen Differentialgleichung die Kurve k schneidet; sie können bei vorgegebener Kurve k natürlich unmittelbar angeschrieben und zur Aufstellung der Differentialgleichung (20) benutzt werden. Die Herleitung dieser Differentialgleichung erfordert also nur eine Elimination. Eine allgemeine Integralfläche dieser partiellen Differentialgleichung stellt als Umhüllungsgebilde einer stetigen Schar von ∞^1 Kugeln des Systemes (19) eine Kanalfläche dar, deren einer Zentraflächenmantel in die Kurve k ausartet. Die Charakteristiken der Differentialgleichung (20) sind die Kreise, längs welcher die allgemeinen Integralflächen von Kugeln des Systemes (19) berührt werden, bilden also tatsächlich Krümmungslinien auf den Integralflächen. Die Normalen der Integralflächen gehören sämtlich einem nicht-linearen Linienkomplexe an, nämlich dem Komplexe der ∞^3 Treffgeraden der Kurve k. Die Monge'sche Gleichung dieses Komplexes geht durch die Substitution (17) aus der Differentialgleichung (20), oder durch Elimination von τ aus den Gleichungen

$$\frac{x-\varphi(\tau)}{dx} = \frac{y-\psi(\tau)}{dy} = \frac{z-\chi(\tau)}{dz} \tag{23}$$

hervor.

Unsere Ausführungen lehren, daß die durch das entwickelte Verfahren gelieferten partiellen Differentialgleichungen die gewünschten Eigenschaften in der Tat besitzen. Wir wollen nun weiterhin zeigen, daß die so erhaltenen Differentialgleichungen aber auch die einzigen nicht-linearen Differentialgleichungen der in unserer Aufgabe gesuchten Kategorie darstellen, deren charakteristische Streifen so beschaffen sind, daß die Normalen ihrer Flächenelemente Kegel erzeugen, deren Integralflächen also Kanalflächen bilden. Sind nämlich, wie in unserem Falle, die Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung Krümmungslinien auf den Integralflächen, dann sind (nach Theor. 26 in § 2 des 14. Kap., pag. 657) nur zwei Fälle denkbar. Entweder besteht eine vollständige Lösung aus ∞^2 Kugeln, oder aber die Integralflächen haben die Eigenschaft, daß die ∞^2 zum System der Charakteristiken einer Integralfläche gehörigen Krümmungskugeln einem Kugelkomplexe angehören. Sollen die Integralflächen nun Kanalflächen sein, auf denen die Charakteristiken Kreise sind, (längs welcher die Kanalflächen von den sie erzeugenden Kugeln berührt werden), so kann von ∞^2 zum System der Charakteristiken einer Integralfläche gehörigen Krümmungskugeln überhaupt nicht gesprochen werden. Die zweite Möglichkeit scheidet in unserem Falle aus, sodaß eine vollständige Lösung der allgemeinsten hier gesuchten Differentialgleichung aus einem Systeme von ∞^2 Kugeln bestehen muß. Dieses System muß aber bei allen

Dilatationen invariant bleiben, da die Normalen der Integralflächen bei den in unserer Aufgabe gesuchten Differentialgleichungen einem Linienkomplexe angehören sollen. Es ist also in der Form (19) enthalten. Denn die Gleichung (19) definiert bei gänzlich beliebiger Wahl der Funktionen φ, ψ, χ das denkbar allgemeinste System von ∞^2 Kugeln, das bei allen Dilatationen in sich übergeht. Die eingeführte Beschränkung, daß nicht alle drei Funktionen φ, ψ, χ in τ oder einer Funktion von τ linear sein sollen, dient dem Zwecke, die aus zutage liegenden Gründen gesondert behandelten linearen partiellen Differentialgleichungen der gesuchten Art von der Betrachtung auszuschließen.

Nachdem wir gezeigt haben, daß die auf dem angegebenen Wege erhaltenen Differentialgleichungen die einzigen nicht-linearen Differentialgleichungen der in der Aufgabe verlangten Art sind, bei denen die Normalen der Flächenelemente der charakteristischen Streifen Kegel bilden, müßten wir jetzt die Frage nach allen nicht-linearen Differentialgleichungen dieser Art untersuchen, bei denen die zu den Elementen der charakteristischen Streifen konstruierten Normalen *Zylinder* erzeugen. Wir erkennen aber sofort, daß es derartige Differentialgleichungen nicht gibt. Die Charakteristiken wären nämlich ebene Kurven und Haupttangentenkurven auf den Integralflächen, also gerade Linien, da jede ebene Haupttangentenkurve einer Fläche geradlinig ist [cf. Seite 4]. Die Normalen der Flächenelemente geradliniger Streifen können aber unter keinen Umständen Zylinder erzeugen.

Es erübrigt also nur noch alle zur gesuchten Klasse gehörigen nicht-linearen partiellen Differentialgleichungen zu ermitteln, bei denen die Normalen der Flächenelemente längs der charakteristischen Streifen *Ebenen* erzeugen. Hier sind die Charakteristiken offenbar ebene Kurven und nicht nur Krümmungslinien, sondern auch geodätische Linien auf den Integralflächen. Nun haben wir aber bei Behandlung der Aufgabe (2, 3) alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ermittelt, deren Charakteristiken zugleich Krümmungslinien und geodätische Linien auf den Integralflächen sind. Es ist klar, daß keine der dort gefundenen Differentialgleichungen mit krummlinigen Charakteristiken die hier verlangte weitere Eigenschaft besitzt, daß die Normalen ihrer Integralflächen einem nicht-linearen Linienkomplexe angehören [cf. Seite 39]. Wohl aber sind unter den nicht-linearen partiellen Differentialgleichungen mit geradlinigen Charakteristiken solche enthalten, denen auch diese Eigenschaft zukommt. Wie wir bei Behandlung der Aufgabe (1, 4) gesehen haben, sind dies alle nicht-linearen partiellen Differentialgleichungen vom Typus der Differentialgleichung

$$F(p, q) = 0 \tag{24}$$

und nur diese [cf. Seite 5]. Da die Integralflächen der nicht-linearen partiellen Differentialgleichung (24), wie überhaupt jeder nicht-linearen partiellen Differentialgleichung mit geradlinigen Charakteristiken, Developpabeln sind, bilden die Charakteristiken als geradlinige Erzeugende tatsächlich Krümmungslinien auf den Integralflächen. Die Normalen der Integralflächen gehören dem nicht-linearen Linienkomplexe an, dessen Monge'sche Gleichung

$$F\left(-\frac{dx}{dz}, -\frac{dy}{dz}\right) = 0 \tag{25}$$

durch die Substitution (17) aus der Differentialgleichung (24) hervorgeht. Da dieser Komplex aus den ∞^3 Treffgeraden der in der unendlich fernen Ebene gelegenen Kurve k_∞ besteht, die in homogenen Punktkoordinaten $(x' : y' : z')$ durch die Gleichung

$$F\left(-\frac{x'}{z'}, -\frac{y'}{z'}\right) = 0 \tag{25'}$$

dargestellt wird, charakterisiert sich der vorliegende Fall als derjenige Spezialfall des vorher [auf Seite 47] betrachteten, in welchem die Kurve k unendlich fern liegt. Aus den ∞^2 Kugeln, die ihren Mittelpunkt auf k hatten und eine vollständige Lösung bildeten, sind die ∞^2 Ebenen geworden, welche die zur Kurve k_∞ in bezug auf den unendlich fernen imaginären Kugelkreis polarreziproke Kurve l_∞ berühren und eine vollständige Lösung der Differentialgleichung (24) bilden [cf. Seite 9]. Entsprechend sind die allgemeinen Integralflächen, die als Umhüllungsgebilde von ∞^1 Kugeln der vollständigen Lösung definiert waren, zu Developpabeln geworden, welche die Kurve l_∞ enthalten, die Charakteristiken, die Kreise waren, also zu geraden Linien (den Sekanten der Kurve l_∞). Wie die Kurve k (bzw. ihre einzelnen Punkte) als Ausartungsgebilde des einen Zentraflächenmantels der Integralflächen der Differentialgleichung (20) anzusehen waren, so können auch hier die Kurve k_∞ (bzw. ihre Punkte) als einer Mantel der Zentraflächen der Integralflächen angesprochen werden. Dies führt zu der Bemerkung, daß der eine Zentraflächenmantel aller Developpabeln, welche dieselbe unendlich ferne Kurve l_∞ enthalten, in die unendlich ferne Kurve k_∞ ausartet, die zur Kurve l_∞ reziprok ist in bezug auf den unendlich fernen imaginären Kugelkreis. Aus unseren Betrachtungen entnehmen wir den

Satz 9: *„Die einzigen nicht-linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken auf den Integralflächen Krümmungslinien bilden und deren Integralflächen zu Normalen lauter Geraden eines Linienkomplexes haben, sind diejenigen, bei welchen der Komplex der Normalen aus den ∞^3 Treffgeraden einer Kurve (im eigent-*

lichen Sinne) k besteht. Jede derartige partielle Differentialgleichung und jeder solche Linienkomplex läßt sich durch einen Eliminationsprozeß ermitteln. Die Charakteristiken sind im allgemeinen Falle Kreise, die Integralflächen Kanalflächen. Liegt die Kurve k insbesondere in der unendlich fernen Ebene, dann arten die Charakteristiken in Geraden und die Integralflächen in Developpabelen aus und es liegen alsdann die nicht-linearen Differentialgleichungen vom Typus $F(p, q) = 0$ vor.“

Zusammenfassung.

Zusammenfassend können wir jetzt behaupten, daß *alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Integralflächen lauter Sekanten einer* (geraden oder krummen) *Linie zu Normalen haben, und nur diese* die in der Aufgabe verlangten Eigenschaften besitzen, daß ihre Charakteristiken Krümmungslinien auf den Integralflächen bilden und diese zu Normalen lauter Geraden eines Linienkomplexes haben.

Spezielle Klasse v. Diffgln d. gesuchten Art.

Als *Beispiel* zu unseren Entwickelungen wollen wir nun noch den Fall behandeln, wo der Komplex der Normalen der Integralflächen aus den Treffgeraden einer beliebigen ebenen Kurve k_e besteht, die nicht (ganz) im Unendlichen liegt. In diesem Falle läßt sich die gesuchte partielle Differentialgleichung stets wirklich angeben. Es würde keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeuten, wenn wir voraussetzten, daß die Kurve k_e in der (XY)-Ebene liegt, da wir dies, wenn nicht der Fall, durch Koordinatentransformation immer erreichen können. Wir ziehen es aber vor, die Gleichungen aller im Raume vorhandenen ebenen Kurven k_e auf ein fest gedachtes Koordinatensystem zu beziehen und zu allen Kurven k_e die entsprechende partielle Differentialgleichung der in Rede stehenden Art zu ermitteln. Zu diesem Zwecke definieren wir die Kurve k_e durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} aX + bY + cZ + d &= 0, \\ \mathfrak{F}(X, Y, Z) &= 0 \end{aligned}\right\} k_e. \tag{26, 27}$$

In dieser Form des Ansatzes sind, wenn über die Konstanten a, b, c, d und die Funktion $\mathfrak{F}$ nicht näher verfügt wird, alle ebenen Kurven des Raumes enthalten. Nach unseren Betrachtungen [auf Seite 46] ist ohne Weiteres klar, daß wir die gesuchte partielle Differentialgleichung durch Elimination der Größen X, Y, Z aus den Gleichungen (26), (27) und den Gleichungen

$$\begin{cases} x - X + (z - Z)p = 0 \\ y - Y + (z - Z)q = 0 \end{cases} \tag{28}$$

erhalten. Es ergibt sich zunächst

$$\begin{cases} X = x + (z - Z)p \\ Y = y + (z - Z)q, \end{cases} \tag{28 α}$$

hieraus mit Hilfe der Gleichung (26)

$$(26\alpha) \qquad Z = z + \frac{ax+by+cz+d}{ap+bq-c}$$

und daher

$$(28\beta) \qquad \begin{cases} X = x - \dfrac{ax+by+cz+d}{ap+bq-c}\,p \\ Y = y - \dfrac{ax+by+cz+d}{ap+bq-c}\,q. \end{cases}$$

Die gesuchte partielle Differentialgleichung lautet somit

$$(29) \quad \mathfrak{F}\left(x - \frac{ax+by+cz+d}{ap+bq-c}p,\ y - \frac{ax+by+cz+d}{ap+bq-c}q,\ z + \frac{ax+by+cz+d}{ap+bq-c}\right) = 0$$

und die Monge'sche Gleichung des Komplexes, dem die Normalen ihrer Integralflächen angehören, mithin

$$(30) \quad \mathfrak{F}\left(x - \frac{ax+by+cz+d}{adx+bdy+cdz}dx,\ y - \frac{ax+by+cz+d}{adx+bdy+cdz}dy,\ z - \frac{ax+by+cz+d}{adx+bdy+cdz}dz\right) = 0.$$

Ist eine partielle Differentialgleichung von der Form (29) vorgelegt, so können die Gleichungen (26) und (27) der entsprechenden ebenen Kurve k_e sofort angeschrieben werden. Damit darf das Integrationsproblem als erledigt angesehen werden; denn man kennt alsdann sofort eine vollständige Lösung der vorliegenden Differentialgleichung, nämlich das System der ∞^2 Kugeln, deren Mitten die Kurve k_e erfüllen.

Analyt. Form d. gesuchten Diffgln.

Schließlich wollen wir kurz noch einiges über die *analytische Form* der partiellen Differentialgleichungen bemerken, welche die in unserer Aufgabe verlangten Eigenschaften besitzen. Die Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung haben dann und nur dann lauter Geraden eines Linienkomplexes zu Normalen, wenn die Differentialgleichung vom Typus

$$(31) \qquad F(p, q, x + zp, y + zq) = 0$$

ist (cf. § 4 des 14. Kap., pag. 681). Unter diesen Differentialgleichungen haben diejenigen und nur diejenigen auch die Eigenschaft, daß ihre Charakteristiken auf den Integralflächen Krümmungslinien bilden, bei denen die Gleichung

$$(32) \quad [F_p + p(F_p p + F_q q)][F_y + F_z q] = [F_q + q(F_p p + F_q q)][F_x + F_z p]$$

infolge von $F = 0$ oder identisch besteht (cf. § 2 des 14. Kap., pag. 657).

§ 6. Beitrag zur Lösung des Problemes (2,6).

„Gesucht sind alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung $F(x, y, z, p, q) = 0$, deren Charakteristiken auf den Integralflächen Krümmungslinien bilden und deren Integralflächen ∞^1 geodätische Linien enthalten, die einem Linienkomplexe angehören."

Ermittelung d. linearen Diffgln d. gesuchten Art.

Wir wollen zunächst alle *linearen* partiellen Differentialgleichungen der verlangten Kategorie ermitteln. Eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, deren Integralflächen ∞^1 geodätische Kurven eines Linienkomplexes enthalten, ist nach unseren Ausführungen in § 2 [cf. Seite 14] dann und nur dann linear, wenn dieser Komplex entweder linear ist oder lauter Rotationskegel zu Komplexkegeln hat. Wir haben an früherer Stelle [cf. Seite 18] auch gezeigt, daß jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung, deren Integralflächen ∞^1 geodätische Kurven eines Linienkomplexes aufweisen, dessen Komplexkegel Rotationskegel sind, immer auch die Eigenschaft besitzt, daß ihre Integralflächen außerdem ∞^1 geodätische Kurven eines linearen Komplexes enthalten. Wir erhalten demnach sämtliche linearen partiellen Differentialgleichungen der gesuchten Art (und nur diese), wenn wir alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung bestimmen, deren Charakteristiken auf den Integralflächen Krümmungslinien sind und deren Integralflächen ∞^1 geodätische Kurven eines linearen Komplexes enthalten.

Nun haben wir aber weiterhin bewiesen [cf. Seite 14], daß jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung, auf deren Integralflächen ∞^1 geodätische Kurven eines linearen Komplexes verlaufen, stets auch die Eigenschaft hat, daß ihre Integralflächen lauter Geraden eines linearen Komplexes (und zwar des nämlichen) zu Normalen haben. Gehören umgekehrt die Normalen der Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung einem linearen Komplexe an, dann enthalten die Integralflächen auch immer ∞^1 geodätische Kurven eines linearen Komplexes (und zwar desselben) [cf. Seite 14]. Hieraus folgt, daß die linearen partiellen Differentialgleichungen der in unserer Aufgabe gesuchten Kategorie mit den partiellen Differentialgleichungen identisch sind, deren Charakteristiken auf allen Integralflächen Krümmungslinien bilden und deren Integralflächen lauter Geraden eines linearen Komplexes zu Normalen haben. Alle diese Differentialgleichungen haben wir aber in § 5 [cf. Seite 44] ermittelt; wir können mithin ohne weiteres das folgende Resultat aussprechen:

Satz 10: *„Die einzigen linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken auf den Integralflächen Krümmungslinien bilden und deren Integralflächen ∞^1 geodätische Kurven eines Linienkomplexes enthalten, sind diejenigen Differentialgleichungen von der Form*

$$(1) \qquad (\beta z - \gamma y + \delta)p + (\gamma x - \alpha z + \varepsilon)q - (\alpha y - \beta x + \zeta) = 0,$$

zwischen deren Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ die identische Relation

$$(2) \qquad \alpha\delta + \beta\varepsilon + \gamma\zeta \equiv 0$$

besteht.“

Diese Differentialgleichungen haben wir in § 5 sehr ausführlich behandelt. Es erübrigt nur noch einige Worte über die geodätischen Komplexkurven auf den Integralflächen einer derartigen Differentialgleichung zu sprechen. Die Integralflächen der Differentialgleichung (1) sind die Rotationsflächen, welche die Achse g des speziellen linearen Komplexes

(3) $\alpha(ydz-zdy)+\beta(zdx-xdz)+\gamma(xdy-ydx)+\delta dx+\varepsilon dy+\zeta dz=0$

zur Rotationsachse haben. Jede solche Rotationsfläche enthält ∞^1 geodätische Kurven dieses linearen Komplexes; dies sind die ∞^1 Meridiane, also die Orthogonaltrajektorien der aus den Parallelkreisen bestehenden Charakteristiken. Aber die Meridiane sind nicht die einzigen geodätischen Komplexkurven der Integralflächen. Aus unseren Betrachtungen auf Seite 18 geht vielmehr hervor, daß überhaupt alle geodätischen Linien der Integralflächen der Differentialgleichung (1) Komplexkurven von Linienkomplexen sind: Jeder der ∞^1 Komplexe, welche die Monge'sche Gleichung

(4) $$[\alpha(ydz-zdy)+\beta(zdx-xdz)+\gamma(xdy-ydx)+\delta dx+\varepsilon dy+\zeta dz]^2 - \lambda^2(d^2x+d^2y+d^2z)=0$$

bei variabelem, von Null verschiedenem λ definiert, überdeckt die in Rede stehenden Rotationsflächen mit zwei Systemen von je ∞^1 geodätischen Linien; in jedem Punkte P einer derartigen Rotationsfläche bilden die beiden hindurchgehenden Kurven eines jeden dieser Komplexe gleiche, aber [im allgemeinen] von Punkt zu Punkt wechselnde Winkel mit der Charakteristik, d. h. dem Parallelkreise durch P. Unsere Überlegungen modifizieren sich in dem Grenzfalle, in welchem in Gleichung (1) $\alpha=\beta=\gamma=0$ ist. Diesen Fall haben wir an frühereren Stellen eingehend erörtet [cf. Seite 19 u. 44].

Ermittelung einer Klasse v. nicht-linearen Diffgln d. gesuchten Art.

Wir wenden uns nunmehr kurz den *nicht-linearen* partiellen Differentialgleichungen der verlangten Kategorie zu. Um zu einer Klasse derartiger Differentialgleichungen zu gelangen, fragen wir zunächst nach allen nicht-linearen partiellen Differentialgleichungen der gesuchten Art, auf deren Integralflächen die ∞^1 Charakteristiken insbesondere mit den ∞^1 geodätischen Komplexkurven zusammenfallen. Bei diesen Differentialgleichungen sind die Charakteristiken Komplexkurven eines Linienkomplexes und bilden folglich nicht nur geodätische Linien, sondern auch Haupttangentenkurven auf allen nicht-singulären Integralflächen (cf. § 5 des 7. Kap., pag. 308), sind also gerade Linien. Es ist klar, daß alle nicht-linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit geradlinigen Charakteristiken, d. h. alle nicht-linearen Differentialgleichungen von der Form

(5) $$\mathfrak{F}(p, q, z-px-qy)=0$$

die beiden verlangten Eigenschaften besitzen. Da nämlich die nichtsingulären Integralflächen dieser Differentialgleichungen abwickelbar sind, bilden die Charakteristiken als geradlinige Erzeugende stets Krümmungslinien auf denselben. Die ∞^1 auf den Integralflächen einer solchen Differentialgleichung verlaufenden geradlinigen Charakteristiken sind aber auch geodätische Linien der Integralflächen und gehören dem aus den ∞^3 Charakteristiken der Differentialgleichung bestehenden Linienkomplexe an.

Unter den Differentialgleichungen von der Form (5) verlangt eine Gruppe von Differentialgleichungen besondere Erwähnung, weil auf ihren Integralflächen auch Systeme krummliniger geodätischer Kurven existieren, die Linienkomplexen angehören. Dies sind die Differentialgleichungen vom Typus der in § 3 behandelten Differentialgleichung

$$G_3(p, q) = 0. \tag{6}$$

Das Nähere über diese Differentialgleichungen haben wir auf Seite 20, 21, 22 ausgeführt.

In § 3 haben wir auch ein Verfahren entwickelt [cf. Seite 13], das zu jedem Linienkomplexe Φ die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$G(x, y, z, p, q) = 0 \tag{7}$$

liefert, deren Integralflächen ∞^1 geodätische Kurven enthalten, die dem Komplexe Φ angehören. Unter diesen Differentialgleichungen $G = 0$ haben diejenigen und nur diejenigen auch die Eigenschaft, daß ihre Charakteristiken Krümmungslinien auf den Integralflächen sind, bei denen die Gleichung

$$[G_p + p(G_p p + G_q q)][G_y + G_z q] = [G_q + q(G_p p + G_q q)][G_x + G_z p] \tag{8}$$

infolge von $G = 0$ oder identisch besteht (cf. § 2 des 14. Kap., pag. 657).

§ 7. Beitrag zur Lösung des Problemes (3, 4).

„Gesucht sind alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung $F(x, y, z, p, q) = 0$, deren Charakteristiken auf den Integralflächen geodätische Linien sind und deren Integralflächen lauter Geraden eines Linienkomplexes zu Normalen haben."

Eine Kurve einer Fläche bildet dann und nur dann eine geodätische Linie derselben, wenn sie entweder eine gerade Linie, oder eine Minimalkurve, oder eine Kurve im eigentlichen Sinne ist, deren Hauptnormalen Flächennormalen sind. Dementsprechend wollen wir bei der Lösung unseres Problemes drei Fälle unterscheiden.

Diffgln d. gesuchten Art mit geradlin. Char.

Im ersten Falle liegt die Frage nach allen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung vor, deren Charakteristiken *geradlinig* sind und deren Integralflächen lauter Geraden eines Linienkomplexes zu Normalen haben. Diese Frage ist durch unsere Untersuchungen in § 2 dahin beantwortet, daß die einzigen partiellen Differentialgleichungen dieser Art diejenigen von der Form der Differentialgleichung

$$\mathfrak{F}(p, q) = 0 \tag{1}$$

sind, in der $\mathfrak{F}$ eine beliebige Funktion von p und q bedeutet [cf. Seite 6].

Diffgln d. gesuchten Art, deren Char. Minimalkurven sind.

Im zweiten Falle haben wir alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu ermitteln, deren Charakteristiken *Minimalkurven* sind und deren Integralflächen lauter Geraden eines Linienkomplexes zu Normalen haben. Daß es *lineare* Differentialgleichungen dieser Art nicht gibt, ist klar. Denn bei einer solchen müßten die Normalen der Integralflächen einem Nullsysteme angehören [cf. Seite 2] und in einem beliebigen Punkte P müßte die Tangente der hindurchgehenden Charakteristik eine Minimalgerade sein. Eine Charakteristik einer partiellen Differentialgleichung, deren Integralflächen lauter Geraden eines Nullsystemes zu Normalen haben, hat jedoch in einem beliebigen Punkte P die Gerade zur Tangente, die auf der dem Punkte durch das Nullsystem zugeordneten Nullebene senkrecht steht; diese Gerade ist aber niemals eine Minimalgerade. Eine *nicht-lineare* partielle Differentialgleichung, deren Charakteristiken Minimalkurven sind, weist einem beliebigen Punkte P als Elementarkegel den absoluten Kegel mit der Spitze P zu. Daraus folgt, daß es nur eine einzige nicht-lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung gibt, deren Charakteristiken Minimalkurven sind, nämlich die dem Komplexe der Minimalgeraden

$$d^2x + d^2y + d^2z = 0 \tag{2}$$

zugeordnete partielle Differentialgleichung

$$p^2 + q^2 + 1 = 0, \tag{3}$$

welche geradlinige Charakteristiken besitzt und in der Form (1) enthalten ist. Der zweite Fall hat demnach weitere Differentialgleichungen der in unserer Aufgabe verlangten Kategorie nicht ergeben.

Diffgln d. gesuchten Art, deren Char. Kurven im eigentlichen Sinne sind.

Es bleibt noch der dritte Fall zu behandeln. Bei den hier gesuchten Differentialgleichungen sollen die Charakteristiken auf allen Integralflächen *Kurven im eigentlichen Sinne* sein, *deren Hauptnormalen Flächennormalen sind*; dazu sollen die Normalen der Integralflächen einem Linienkomplexe angehören. Nun haben wir aber an früherer Stelle [cf. Seite 27] bewiesen, daß die Charakteristiken einer linearen partiellen Differentialgleichung stets geradlinig sind, wenn sie auf allen Integralflächen geodätische Linien bilden. Die im vorliegenden Falle

gesuchten Differentialgleichungen sind also sicher nicht-linear. Die Differentialgleichung $F = 0$ sei die allgemeinste derartige Differentialgleichung. Dann ist auch der Komplex Φ, dem die Normalen ihrer Integralflächen angehören, nicht-linear [cf. Seite 2]. Wir wollen nun einen beliebigen charakteristischen Streifen der Differentialgleichung $F = 0$ allen ∞^1 Dilatationen unterwerfen. Dabei geht dieser (nach § 4 des 14. Kap., pag. 682) in ∞^1 charakteristische Streifen derselben Differentialgleichung über. Die ∞^1 gemeinsamen Normalen der so erhaltenen ∞^1 charakteristischen Streifen bilden eine dem Komplexe Φ angehörige Regelfläche, die dadurch ausgezeichnet ist, daß die Orthogonaltrajektorien ihrer geradlinigen Erzeugenden Charakteristiken der Differentialgleichung $F = 0$ sind. Entsprechend der Tatsache, daß diese, weil nicht-linear, gerade ∞^3 Charakteristiken besitzt, enthält der Komplex Φ gerade ∞^2 derartige ausgezeichnete Regelflächen. Da die ∞^1 auf einer solchen Regelfläche gelegenen Charakteristiken der Differentialgleichung $F = 0$ nun aber offenbar Haupttangentenkurven dieser Regelfläche sind, trägt jede der genannten ∞^2 Regelflächen ein orthogonales Netz von Haupttangentenkurven, wobei das eine System der Haupttangentenkurven aus geraden Linien besteht. Diese Regelflächen sind also Minimalflächen. Nun gibt es aber (cf. Scheffers „Anwend. d. Diff.- u. Int.-Rechn. auf Geom.“, II. Bd., pag. 242 u. 243, sowie Darboux «Théor. d. Surf.», I. Bd., pag. 397) nur drei Arten von geradlinigen Minimalflächen: die Ebenen, die gemeinen Schraubenregelflächen und die imaginären Flächen, welche von den Hauptnormalen der Kurven erzeugt werden, die mit der Kurve

$$(4) \qquad x = \frac{u^3}{6r^2} - u, \quad y = -\frac{iu^3}{6r^2}, \quad z = -\frac{u^2}{2r} \quad (r = \text{const.}, u \text{ var.})$$

kongruent sind. Daraus folgt, daß die Charakteristiken der Differentialgleichung $F = 0$ nur entweder ebene Kurven oder gemeine Schraubenlinien oder gewisse imaginäre Kurven dritter Ordnung sein können, die mit der Kurve (4) kongruent sind. Wir erkennen nun aber leicht, daß es keine partielle Differentialgleichung der im vorliegenden Falle gesuchten Art geben kann, deren Charakteristiken ebene Kurven sind. Die Charakteristiken einer solchen Differentialgleichung wären nämlich, da jede ebene geodätische Kurve einer Fläche eine Krümmungslinie derselben ist, zugleich Krümmungslinien und geodätische Linien auf den Integralflächen. Diese Differentialgleichungen würden also zu der in § 4 auf Seite 27 ermittelten Kategorie gehören. Unter den dort gefundenen Differentialgleichungen sind aber — wie wir auf Seite 39 eigens betont haben — keine solchen vorhanden, deren Integralflächen

zu Normalen lauter Geraden eines Linienkomplexes haben, was bei den hier gesuchten Differentialgleichungen der Fall sein müßte.

Es bestehen also nurmehr zwei Denkmöglichkeiten: Die Charakteristiken der gesuchten, als nicht-linear erkannten Differentialgleichungen können allenfalls nur gemeine Schraubenlinien oder aber imaginäre Kurven sein, die mit der Kurve (4) kongruent sind.

Analyt. Form d. gesuchten Diffgln.

Wir wollen uns nun noch kurz mit der *analytischen Gestalt* der in Aufgabe (3, 4) gesuchten Differentialgleichungen befassen. Einerseits sind die Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung

$$\varphi(x, y, z, p, q) = 0$$

dann und nur dann geodätische Linien auf allen Integralflächen, wenn infolge von $\varphi = 0$ die Gleichung

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} p & q & -1 \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2} & \frac{d^2z}{dt^2} \end{vmatrix} = 0$$

besteht, wobei

$$(6) \qquad \frac{dx}{dt} = \varphi_p, \quad \frac{dy}{dt} = \varphi_q, \quad \frac{dz}{dt} = p\varphi_p + q\varphi_q$$

gesetzt ist (cf. § 3 des 14. Kap., pag. 673). Andererseits haben die Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung dann und nur dann lauter Geraden eines Komplexes zu Normalen, wenn die Differentialgleichung von der Form

$$(7) \qquad \mathfrak{F}(p, q, x + zp, y + zq) = 0$$

ist (cf. § 4 des 14. Kap., pag. 681). Daraus folgt, daß eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung dann und nur dann die beiden in Aufgabe (3, 4) verlangten Eigenschaften besitzt, wenn sie von der Form (7) ist und zudem das Kriterium (5) befriedigt.

§ 8. Beitrag zur Lösung des Problemes (3, 6).

„Es sind alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung $F(x, y, z, p, q) = 0$ zu ermitteln, deren Charakteristiken auf allen Integralflächen geodätische Linien sind und deren Integralflächen ∞^1 geodätische Linien enthalten, die einem Linienkomplexe angehören.“

Ermittelung d. linearen Diffgln d. gesuchten Art.

Ohne eine methodische Lösung der vorliegenden Aufgabe zu beabsichtigen, wollen wir in aller Kürze einige Resultate zusammenstellen, die sich aus unseren früheren Untersuchungen ohne weiteres ergeben. Wir fragen zunächst nach allen *linearen* partiellen Differentialgleichungen

der gesuchten Kategorie. Wie wir in § 4 bewiesen haben, bilden die Charakteristiken einer linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung dann und nur dann geodätische Linien auf allen Integralflächen, wenn sie gerade Linien sind [cf. Seite 27]. Wir erhalten demnach alle linearen Differentialgleichungen der in unserer Aufgabe verlangten Art (und nur diese), wenn wir alle linearen partiellen Differentialgleichungen bestimmen, deren Charakteristiken gerade Linien sind und deren Integralflächen ∞^1 geodätische Kurven enthalten, die einem Linienkomplexe angehören. Diese Differentialgleichungen haben wir aber schon in § 3 ermittelt und eingehend behandelt, so daß wir uns hier auf die Aussprache des folgenden Satzes beschränken können:

Satz 11: *„Die einzigen linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken auf den Integralflächen geodätische Linien sind und deren Integralflächen unendlich viele geodätische Komplexkurven enthalten, sind die von der Form*

$$ap + bq - c = 0.\text{“}$$ (1)

[Bzgl. d. Näheren cf. Seite 14.]

Analyt. Ansatz.

In einem früheren Paragraphen [cf. § 3 Seite 13] haben wir angegeben, wie wir zu jedem Linienkomplexe die partielle Differentialgleichung erster Ordnung erhalten, deren Integralflächen ∞^1 geodätische Kurven dieses Komplexes aufweisen. Von diesen Differentialgleichungen haben diejenigen und nur diejenigen, welche dem auf Seite 57 unter Nummer (5) zitierten Kriterium genügen, auch die Eigenschaft, daß ihre Charakteristiken geodätische Linien der Integralflächen sind.

Spezielle Klasse v. Diffgln d. gesuchten Art.

Durch eine Schlußweise, die der in § 6 [auf Seite 53 u. 54] angewandten ganz analog ist, erkennen und beweisen wir ferner leicht, daß alle nicht-linearen Differentialgleichungen von der Form

$$F(p, q, z - px - qy) = 0$$ (2)

die in vorliegender Aufgabe verlangten Eigenschaften besitzen. (Bei diesen Differentialgleichungen — und nur bei diesen — fällt das von den Charakteristiken gebildete System geodätischer Linien einer beliebigen Integralfläche insbesondere mit einem Systeme geodätischer Komplexkurven zusammen.) Natürlich sind auch hier die Differentialgleichungen vom Typus der Differentialgleichung

$$G_3(p, q) = 0$$ (3)

noch besonders anzuführen [cf. Seite 20, 21, 22, 54].

§ 9. Beitrag zur Lösung des Problemes (4, 6).

„Es sind alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung $F(x, y, z, p, q) = 0$ zu ermitteln, deren Integralflächen zu Normalen

lauter Geraden eines Linienkomplexes haben und ∞^1 geodätische Linien enthalten, die einem Linienkomplexe angehören."

Es gilt hier offenbar zwei Hauptfälle zu unterscheiden, je nachdem die Normalen und die ∞^1 geodätischen Komplexkurven der Integralflächen einem und demselben, oder aber zwei verschiedenen Linienkomplexen angehören.

In die Behandlung des *ersten Hauptfalles* eintretend, wollen wir uns durch die Monge'sche Gleichung

D. Normalen u. d. geod. Kompl.-kurven d. Integralfln gehör. einem und demselben Linienkompl. an.

$$(1) \qquad \Phi(ydz - zdy,\ zdx - xdz,\ xdy - ydx,\ dx,\ dy,\ dz) = 0,$$

in der Φ irgend eine homogene Funktion ihrer Argumente bedeutet, einen beliebigen Linienkomplex vorgeben. Dieser Komplex weist jedem Raumpunkte P einen Kegel K_1 zu. Konstruieren wir in jedem Punkte P den zum Kegel K_1 supplementären Elementarkegel K_2, so erhalten wir die Elementarkegel der partiellen Differentialgleichung

$$(2) \qquad F(p, q, x + zp, y + zq) = 0,$$

deren Integralflächen lauter Geraden des vorgegebenen Komplexes zu Normalen haben. Die Differentialgleichung (2) kann bei gegebener Gleichung (1) sofort aufgestellt werden (cf. § 4 des 14. Kap., pag. 679). Ermitteln wir ferner die Zentrakegel der Komplexkegel K_1, so ergeben sich die Elementarkegel K_3 der partiellen Differentialgleichung

$$(3) \qquad G(x, y, z, p, q) = 0,$$

deren Integralflächen ∞^1 geodätische Kurven des Komplexes (1) enthalten. Auch diese Differentialgleichung können wir aus der Mongeschen Gleichung (1) sofort herleiten, wie wir in § 3 gezeigt haben [cf. Seite 13]. Im allgemeinen, d. h. bei ganz beliebig vorgegebenem Komplexe (1), werden die partiellen Differentialgleichungen (2) und (3) voneinander verschieden sein, es wird also keine partielle Differentialgleichung existieren, welche zugleich die beiden Eigenschaften besitzt, daß die Normalen ihrer Integralflächen und ∞^1 geodätische Kurven auf diesen dem vorgelegten Komplexe angehören. Eine solche läßt sich vielmehr nur dann bestimmen, wenn in jedem Punkte P die Elementarkegel K_2 und K_3 zusammenfallen und folglich der Komplexkegel K_1 mit dem zum Kegel K_3 supplementären Kegel K_4 identisch ist. Dieser Fall liege vor und T_1 sei die Ebene, welche den Elementarkegel K_1 des Punktes P längs der beliebig gegriffenen Mantellinie m_1 berührt. Alsdann ist sowohl die Ebene T_2, die auf m_1 im Punkte P senkrecht steht als auch die Ebene T_3, welche die Ebene T_1 längs m_1 senkrecht schneidet, eine Tangentenebene des Elementarkegels $K_2 (\equiv K_3)$. Die in P zur Ebene T_3 errichtete Normale m_4 ist dann

eine Mantellinie des Kegels $K_1 (\equiv K_4)$. Wie durch jede Mantellinie des Kegels K_1 muß auch durch m_4 eine Tangentenebene des Kegels $K_2 (\equiv K_3)$ hindurchgehen; dies ist die Ebene T_2. Da nun die Ebene T_2 längs m_4 auf der Ebene T_1 senkrecht steht, so ergibt sich, daß die Ebene T_1 den Komplexkegel K_1 nicht nur längs der Mantellinie m_1, sondern auch längs der zu m_1 senkrechten Mantellinie m_4 tangiert. Ist also ein Linienkomplex gegeben, zu dem sich eine partielle Differentialgleichung der gesuchten Art ermitteln läßt, so berührt jede Tangentenebene eines seiner Komplexkegel K_1 diesen Kegel K_1 längs zweier zueinander senkrechten Mantellinien. Dies ist aber offenbar nur dann der Fall, wenn die Komplexkegel aus lauter Minimalgeraden bestehen, oder wenn sie in ebene Büschel ausarten.

Im ersten Falle liegt der durch die Gleichung

$$d^2x + d^2y + d^2z = 0 \tag{4}$$

definierte Komplex der Minimalgeraden vor und es ergibt sich als gesuchte partielle Differentialgleichung die Gleichung

$$p^2 + q^2 + 1 = 0. \tag{5}$$

Die Integralflächen dieser partiellen Differentialgleichung enthalten als Minimaldeveloppabelen (bzw. Minimalebenen) stets ∞^1 Minimalgeraden, die als Normalen und auch als geodätische Komplexkurven der Integralflächen angesehen werden können.

Im zweiten Falle ist der gegebene Komplex notwendig ein linearer. Daß sich überhaupt zu jedem linearen Komplexe (Nullsysteme) eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung finden läßt, deren Integralflächen lauter Geraden dieses Komplexes zu Normalen haben und zugleich ∞^1 geodätische Kurven desselben Komplexes enthalten, ist durch unsere Ausführungen in § 3 bewiesen [cf. Seite 14]. Auf Grund jener früheren Betrachtungen können wir unmittelbar behaupten, daß die aus der Pfaff'schen Gleichung des allgemeinsten Nullsystemes

$$a(ydz - zdy) + b(zdx - xdz) + c(xdy - ydx) + \partial dx + edy + fdz = 0 \tag{6}$$

vermöge der Substitution

$$dx : dy : dz = p : q : -1 \tag{7}$$

hervorgehende Gleichung

$$a(-y - zq) + b(zp + x) + c(xq - yp) + \hat{c}p + eq - f = 0 \tag{8}$$

eine Differentialgleichung darstellt, welche die im vorliegenden Falle verlangte Beschaffenheit besitzt. Die geodätischen Kurven, mit denen das Nullsystem (6) die Integralflächen der Differentialgleichung (8) überdeckt, sind die Orthogonaltrajektorien der auf diesen verlaufenden Charakteristiken [cf. Seite 18]. Die Differentialgleichungen von der

Form (8), auf die wir noch näher eingehen werden, sind unter den linearen Differentialgleichungen natürlich die einzigen, welche die verlangten Eigenschaften besitzen.

Die in Lies „Geometrie der Berührungstransformationen" über das Problem (6) angestellten Untersuchungen (cf. § 4 des 14. Kap., pag. 684 u. 685), auf denen wir unsere Betrachtungen aufgebaut haben, erstrecken sich nicht auf den Fall, in welchem die geodätischen Komplexkurven der Integralflächen *geradlinig* sind. Wir erkennen aber sofort, daß alle nicht-linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Elementarkegel zu sich selbst supplementäre Komplexkegel sind, zu der hier gesuchten Klasse von Differentialgleichungen gehören. Diese Differentialgleichungen haben wir in § 2 [cf. Seite 10, 11] und in § 3 [cf. Seite 23, 24, 25] eingehend behandelt*). Die ∞^1 auf einer beliebigen Integralfläche einer solchen Differentialgleichung verlaufenden geradlinigen Charakteristiken sind geodätische Linien der Integralflächen und gehören demselben Linienkomplexe an wie die Normalen der Integralflächen.

D. Normalen u. d. geod. Kompl.-kurven d. Integralfln gehör. zwei verschiedenen Linienkompl. an.

Wir wenden uns nunmehr zunächst der Behandlung des *zweiten Hauptfalles* zu, in welchem alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung gesucht werden, deren Integralflächen zu Normalen lauter Geraden eines Linienkomplexes Φ_n haben und zugleich ∞^1 geodätische Linien eines anderen Komplexes Φ_g enthalten. Hier bestehen zunächst vier Denkmöglichkeiten, nämlich daß es partielle Differentialgleichungen gebe, bei denen die beiden Komplexe Φ_n, Φ_g zugleich linear sind, solche, bei denen Φ_n nicht-linear, Φ_g aber linear ist, ferner solche, bei denen Φ_n linear, Φ_g jedoch nicht-linear ist und schließlich solche, bei denen Φ_n und Φ_g gleichzeitig nicht-linear sind.

Daß der erste Fall in Wirklichkeit nicht vorkommen kann, ist klar. Zwei verschiedene lineare Komplexe ordnen jedem Raumpunkte P zwei verschiedene Nullebenen zu; deshalb sind auch die beiden Elementarbüschel, deren Achsen in P auf den Nullebenen bzw. senkrecht stehen, nicht miteinander identisch. Die partielle Differentialgleichung, deren Integralflächen lauter Geraden des Komplexes Φ_n zu Normalen haben, ist also eine andere als die partielle Differentialgleichung, auf deren Integralflächen ∞^1 Kurven des Komplexes Φ_g geodätische Linien bilden.

Auch der zweite Fall kann offenbar nicht eintreten. Eine partielle Differentialgleichung nämlich, deren Integralflächen zu Normalen lauter

*) Auch damals haben wir mit Bedacht die Differentialgleichung $p^2+q^2+1=0$ gesondert besprochen.

schaft haben, daß die Normalen ihrer Integralflächen einem nicht-linearen Linienkomplexe Φ_n angehören, so muß sie die Form

$$H(p, q, x + zp, y + zq) = 0 \tag{11}$$

besitzen und nicht-linear sein [cf. Seite 2]. Der Komplex Φ_g darf demnach nicht lauter Rotationskegel zu Komplexkegeln haben, da $\bar{G} = 0$ sonst linear wäre [cf. Seite 14]. Ist nun die Differentialgleichung (10) nicht-linear und von der Form (11), dann gehören die Normalen der Integralflächen einem nicht-linearen Komplexe Φ_n an, der nach dem bei Erörterung des ersten Hauptfalles Gesagten vom Komplexe Φ_g sicher verschieden ist, wofern Φ_g nicht mit dem Komplexe der Minimalgeraden identisch ist [cf. Seite 60]. Die Differentialgleichung (10) ist alsdann eine Differentialgleichung der gesuchten Art.

Bezeichnen wir die Komplexkegel des vorgelegten nicht-linearen Komplexes Φ_g mit K_1, ihre Zentrakegel mit K_3 und die zu den Kegeln K_3 supplementären Elementarkegel mit K_4, so ist nach früherem klar, daß sich zu dem Komplexe Φ_g dann und nur dann eine partielle Differentialgleichung der verlangten Art finden läßt, wenn die Kegel K_4 einem nicht-linearen Komplexe Φ_n angehören. Eine Klasse von Linienkomplexen Φ_g, bei denen dies der Fall ist, können wir sofort angeben.

Sind nämlich die Kegel K_1 eines nicht-linearen Komplexes Φ_g insbesondere untereinander kongruent und gleich gestellt, dann gilt dies auch von den Kegeln K_4; letztere sind daher alsdann ebenfalls Komplexkegel eines Linienkomplexes, und zwar eines nicht-linearen, wenn die Kegel K_1 keine Rotationskegel sind. Ist also ein beliebiger nicht-linearer Linienkomplex Φ_g gegeben, dessen Monge'sche Gleichung x, y, z nicht enthält — der Komplex der Minimalgeraden und die Linienkomplexe, die Rotationskegel zu Komplexkegeln haben, sind natürlich ausgenommen — und ermitteln wir die partielle Differentialgleichung

$$G_3(p, q) = 0,^*) \tag{12}$$

deren Integralflächen ∞^1 geodätische Kurven dieses Komplexes enthalten, so gehören die Normalen ihrer Integralflächen einem vom Komplexe Φ_g verschiedenen, nicht-linearen Komplexe Φ_n an, dessen Mongesche Gleichung leicht bestimmt werden kann [cf. Seite 13]. Wie in § 3 bewiesen, enthalten die Integralflächen der Differentialgleichung (12) auch ∞^1 geodätische Kurven desjenigen nicht-linearen Komplexes, dessen Komplexkegel K_2 zu den Kegeln K_1 supplementär sind [cf. Seite 21]. Die beiden in Rede stehenden Systeme von je ∞^1 geo-

*) Wir wenden absichtlich die auf Seite 21 gebrauchte Bezeichnung an.

dätischen Komplexkurven bilden auf jeder Integralfläche der Differentialgleichung (12) ein orthogonales Netz.

Zum Schlusse weisen wir noch darauf hin, daß die ∞^1 auf einer Integralfläche einer beliebigen nicht-linearen Differentialgleichung von der Form

$$F(p, q) = 0 \tag{13}$$

verlaufenden geradlinigen Charakteristiken als geodätische Linien des nicht-linearen Komplexes angesehen werden können, der von den ∞^3 Charakteristiken gebildet wird. Die Normalen der Integralflächen einer solchen Differentialgleichung gehören einem anderen nicht-linearen Komplexe an, falls ihre Elementarkegel nicht zu sich selbst supplementär sind [cf. Seite 61].